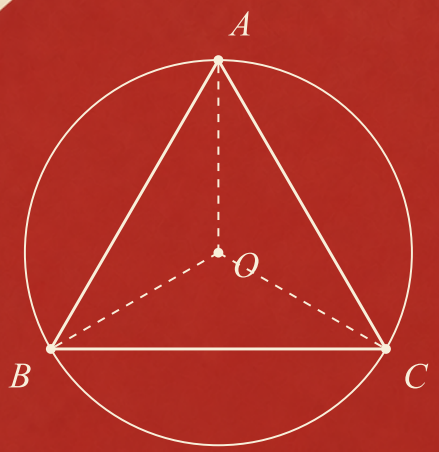
北海道大学

文系

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

北海道大学

文系数学

2017～2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、北海道大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	9
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	17
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	25
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	33
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	41
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	49
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	57
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	65
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	73

分野索引 …… 81

2026 年度 北海道大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

関数 $f(x) = x^3 - 2x^2$ について，次の問いに答えよ。ただし，a は $a > 2$ を満たす定数とする。

(1) $f(x)$ の極値をすべて求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^a |f(x)|dx$ を求めよ。

解説

三つの小問では、極値、閉区間の最大、絶対値付き積分という異なる性質を調べます。同じ増減表を使える部分もありますが、関数の符号と導関数の符号を混同しないようにします。まず (1) の導関数は $f'(x) = x(3x-4)$ です。$x < 0$ で正、$0 < x < 4/3$ で負、$x > 4/3$ で正となり、増加、減少、増加の順です。

従って $x = 0$ で極大値 0、$x = 4/3$ で極小値 $-32/27$ です。導関数が零となるだけでは極値と判断できませんが、今回はどちらも前後で符号が変わります。極大値が零でも極大であることに変わりはありません。「最大値」と違い、近くの点との比較で定まる値です。

(2) は $0 \leqq x \leqq a$ という閉区間の最大です。内部の極値の候補だけでなく、両端 $x = 0, a$ も比較します。$a > 2$ により $f(a) = a^2(a-2) > 0$ です。$f(0) = 0$、内部の極小値は負なので、最大は端点 $x = a$ における $a^2(a-2)$ です。a が指定の範囲内にある限り、この比較の結果は変わりません。

同じことは増減からも分かります。0 から $4/3$ までは減少、その後は増加なので、閉区間の最大はどちらかの端点です。$a > 2$ という条件が、右端の値を左端より大きいと保証しています。条件を使わずに「右端で最大」とするのではなく、値の正負または比較を示します。

(3) で絶対値を外すには、導関数ではなく $f(x)$ 自身の符号を調べます。$f(x) = x^2(x-2)$ なので、$0 < x < 2$ で負、$x > 2$ で正です。$x = 0$ では零となりますが、二重の因子なのでその前後で符号は変わりません。積分範囲内では $x = 2$ だけを切り替え点とします。

従って積分は $-\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^a f(x)\,dx$ です。原始関数を $F(x) = x^4/4 - 2x^3/3$ とすると、

$$-(F(2) - F(0)) + (F(a) - F(2)) = F(a) - 2F(2).$$

$F(0) = 0$ であり、$F(2) = -4/3$ なので、結果は $a^4/4 - 2a^3/3 + 8/3$ です。負の部分の積分を符号反転するため、$F(2)$ が二回差し引かれることを式で確認します。

絶対値を積分の外へ移して、元の定積分の絶対値を取る方法は使えません。正と負の面積が相殺された後の値になるからです。今回は $a > 2$ で符号の異なる両区間が含まれており、それぞれを非負の面積として足す必要があります。a が 2 に近づく場合には、式の値が $4/3$ に近づき、負の部分だけの面積と一致することも検算になります。

2 答案

(1) $f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$ である。したがって、$f'(x)=0$ となるのは $x=0,\quad x=\frac{4}{3}$ である。

導関数の符号を調べると、$x<0$ で $f'(x)>0$、$0<x<\frac{4}{3}$ で $f'(x)<0$、$x>\frac{4}{3}$ で $f'(x)>0$ である。よって $x=0$ で極大、$x=\frac{4}{3}$ で極小となる。それぞれの値は $f(0)=0$,

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{64}{27}-\frac{32}{9}=-\frac{32}{27}$$

である。したがって極大値は 0、極小値は $-\dfrac{32}{27}$ である。

(2) $0\leqq x\leqq a$ に含まれる極値候補は $x=0$ と $x=\frac{4}{3}$ であり、端点 $x=a$ も比較する。各値は

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{32}{27},\quad f(a)=a^3-2a^2=a^2(a-2)$$

である。ここで $a>2$ より $a^2(a-2)>0$ であるから、$f(a)>f(0)>f(\frac{4}{3})$ となる。

よって $0\leqq x\leqq a$ における最大値は a^3-2a^2 である。

(3) $f(x)=x^3-2x^2=x^2(x-2)$ であり、$x^2\geqq 0$ だから、$0\leqq x\leqq 2$ では $f(x)\leqq 0$、$2\leqq x\leqq a$ では $f(x)\geqq 0$ である。$a>2$ なので、絶対値を外すと $\int_0^a|f(x)|\,dx=-\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^a f(x)\,dx$ となる。

原始関数を $F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}$ とおくと、$F(0)=0,\quad F(2)=\frac{16}{4}-\frac{16}{3}=-\frac{4}{3}$ である。したがって $-\int_0^2 f(x)\,dx=-(F(2)-F(0))=\frac{4}{3}$, $\int_2^a f(x)\,dx=F(a)-F(2)=\frac{a^4}{4}-\frac{2a^3}{3}+\frac{4}{3}$. ゆえに $\int_0^a|f(x)|\,dx=\frac{a^4}{4}-\frac{2a^3}{3}+\frac{8}{3}$ である。

3 別解・背景

極値を調べた点 $x=4/3$ と、絶対値を外す際の分割点 $x=2$ は役割が違います。前者は増減が切り替わる点、後者は関数の値の符号が切り替わる点です。グラフを考えると、$0<x<2$ の部分は x 軸より下にあり、その部分の面積を正に数えるために積分の符号を反転させています。

2026 年度 北海道大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

数列 $\{a_n\}$ は，すべての項が正であり，次の条件を満たすとする。

$$a_1 = 4, \qquad a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n + 2}$ とおく。b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

分数で次の項を表す漸化式ですが、設問の置換を使うと一次の関係へ変わります。元の式から $a_{n+1} = 2/(a_n+1)$ です。すべての項が正という条件により、a_n+1、a_n+2 は零にならず、この除法と b_n の定義が使えます。分母の条件を確認してから、指定の b_{n+1} へ代入します。

分母の中の分数を整理すると、

$$b_{n+1} = \frac{1}{2/(a_n+1)+2} = \frac{a_n+1}{2(a_n+2)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a_n+2}\right) = \frac{1-b_n}{2}.$$

最後の変形は、$a_n+1 = (a_n+2)-1$ を使っています。分母に a_n+2 が現れたことで、置換の定義をそのまま使えるようになります。

(2) では定数項を含む一次の漸化式を等比数列へ直します。右辺に一定値 c を入れても c に戻るよう、$c = (1-c)/2$ を解くと $c = 1/3$ です。両辺からこの値を引けば、$b_{n+1} - 1/3 = -(1/2)(b_n - 1/3)$ です。定数項が消え、差が公比 $-1/2$ の等比数列となります。

初項は $b_1 = 1/(4+2) = 1/6$ です。等比数列の初項は b_1 ではなく、$b_1 - 1/3 = -1/6$ なので、

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^n + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

です。時刻や番号の起点を第 1 項に取ったため、公比の指数は $n-1$ です。符号を整理するときは、初項を代入して正の $1/6$ に戻ることを確かめます。

元の項は $a_n = 1/b_n - 2$ なので、一般項は

$$a_n = \frac{2^n - 2(-1)^n}{2^n + (-1)^n}$$

となります。通分の際には分母全体へ 2 を掛けるため、分子の $(-1)^n$ の係数が -2 になることを確認します。偶数と奇数に分けても書けますが、符号の累乗を残せば一つの式で表せます。

この式の分母は、$n = 1$ で 1、$n \geqq 2$ で少なくとも $2^n - 1 > 0$ です。分子も奇数なら $2^n + 2 > 0$、偶数なら $n \geqq 2$ で $2^n - 2 > 0$ です。従ってすべての自然数で定義され、元の正値条件を満たします。分数の一般項を得た後に分母と正値を確かめることが大切です。

$n = 1$ では 4、$n = 2$ では $2/5$ となり、元の初項と最初の漸化式に一致します。公比が負なので b_n は $1/3$ の上下を交互に取りますが、各項の正値とは矛盾しません。分数の漸化式を置換で一次式へ変え、一定値との差から等比数列を作り、最後に逆変換する三段階を順に示します。

公比の負号は、元の数列が負になるという意味ではありません。一般項から $a_n - 1 = -3(-1)^n/\{2^n + (-1)^n\}$ なので、奇数の項は一より大きく、偶数の項は一より小さくなります。それでも分子分母の正値確認により全項は正です。一は元の漸化式へ代入しても次に一を与える値で、この値を中心に上下を交互に取る様子が、置換後の等比数列の負の公比に対応します。

2 答案

(1) 漸化式より $a_{n+1} = \frac{2}{a_n+1}$ である。したがって

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}+2} = \frac{1}{\dfrac{2}{a_n+1}+2} = \frac{a_n+1}{2(a_n+2)}$$

となる。

ここで $\frac{a_n+1}{a_n+2} = 1 - \frac{1}{a_n+2} = 1 - b_n$ であるから、$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ である。

(2) (1) より $b_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b_n$ である。この漸化式の一定値を c とおくと $c = \frac{1}{2}(1-c)$ より $c = \frac{1}{3}$ である。したがって $b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$ となる。

また $b_1 = \frac{1}{a_1+2} = \frac{1}{6}$ であるから、$b_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ である。よって

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

となり、$b_n = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3\cdot 2^n} = \frac{2^n+(-1)^n}{3\cdot 2^n}$ を得る。

したがって

$$a_n = \frac{1}{b_n} - 2 = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + (-1)^n} - 2 = \frac{2^n - 2(-1)^n}{2^n + (-1)^n}$$

である。

3 別解・背景

公比が負であるため、$b_n - 1/3$ の符号は一項ごとに変わります。一方、絶対値は一項進むごとに半分になります。したがって b_n は $1/3$ の上下を交互に動きながら近づき、$a_n = 1/b_n - 2$ は 1 に近づきます。元の漸化式に $a_n = 1$ を代入すると $a_{n+1} = 1$ となることも、この結果と対応します。

3　2026 年度 北海道大学・文系 第 3 問

【数学（文系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

O を原点とする座標空間に 3 点 $A(0,\ 1,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 2)$，$C(-1,\ 0,\ -2)$ をとる。3 点 A, B, C を通る平面上に点 H をとる。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s, t をとる。H の座標を s と t を用いて表せ。

(2) 3 点 A, B, C を通る平面と直線 OH が直交するとき，H の座標を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

1　解説

平面上の点を表すには、平面内の一つの基準点と、平行でない二方向を使います。ここでは基準点は A、方向は $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ と指定されています。それぞれの成分は $\overrightarrow{AB}=(0,0,2)$、$\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-2)$ です。この二つは平行でないので、与えられた係数 s,t で平面上の点を表せます。

(1) では $\overrightarrow{AH}$ の成分を出した後に、A の位置を加えます。原点を始点とするベクトルは

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(-t,1-t,2s-2t)$$

です。従って H の座標も $(-t,1-t,2s-2t)$ です。$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{OH}$ は始点が違うため、$\overrightarrow{OA}$ の加算を忘れると、平面を原点へ移した別の点を答えてしまいます。

(2) では、この平面に垂直な方向を内積で表します。$\overrightarrow{OH}$ が、平面内の二つの方向の両方と垂直であることが必要十分です。$\overrightarrow{AB}$ との内積から $4s-4t=0$、$\overrightarrow{AC}$ との内積から $-4s+6t-1=0$ となります。一方向だけに垂直では、平面全体に垂直とは限りません。

最初の式で $s=t$ とし、次の式に代入すると $2t-1=0$ です。よって $s=t=1/2$、$H=(-1/2,1/2,0)$ となります。この点は原点ではないので、直線 OH も確かに定まります。求めた成分を二つの内積に戻せばどちらも零となり、平面所属と垂直の両方が確認できます。

(3) で体積を求める際には、(2) で得た高さ OH を必ず使う必要はありません。底面を ABC とすればその面積の計算が必要ですが、座標を見ると O,A,B はすべて平面 $x=0$ にあります。OA は y 軸方向で長さ 1、AB は z 軸方向で長さ 2 なので、三角形 OAB は直角三角形です。

この三角形の面積は $1\cdot2/2=1$ です。残る頂点 C から平面 $x=0$ までの距離は、横方向の座標の絶対値 $|-1|=1$ です。従って四面体の体積は、底面積掛ける高さの三分の一から $1/3$ となります。高さとして OC の長さを使ってはいけません。必要なのは、選んだ底面に垂直な距離です。

四面体はどの面を底面にしても体積が同じなので、計算しやすい面を選べます。前問の量を使うことに固執せず、座標平面上の直角三角形があるかを見直すと、計算を減らせます。(1)(2) ではベクトルによる平面と垂直の条件、(3) では底面と高さという幾何的な量を用いて、それぞれに適した方法を選ぶ問題です。

2 答案

(1)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,0,2),\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-1,-1,-2)$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(0,0,2s)+(-t,-t,-2t)=(-t,-t,2s-2t)$$

となる。

よって $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=(0,1,0)+(-t,-t,2s-2t)=(-t,1-t,2s-2t)$ である。

(2) 直線 OH が平面 ABC と直交するので、$\overrightarrow{OH}$ は平面 ABC 内の方向ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直である。すなわち

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\quad \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

である。

(1) より $\overrightarrow{OH}=(-t,1-t,2s-2t)$ であるから、まず

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(-t,1-t,2s-2t)\cdot(0,0,2)=4s-4t$$

であり、$s=t$ を得る。また

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(-t,1-t,2s-2t)\cdot(-1,-1,-2)=6t-4s-1$$

であるから、$6t-4s-1=0$ である。$s=t$ を代入すると $2t-1=0$ より $s=t=\frac{1}{2}$ となる。

したがって $H=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ である。

(3) 底面を三角形 OAB とみる。点 O,A,B はいずれも平面 $x=0$ 上にあり、$\overrightarrow{OA}=(0,1,0),\quad \overrightarrow{AB}=(0,0,2)$ である。これらは垂直で、長さはそれぞれ $1,2$ だから、三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$ である。

点 $C(-1,0,-2)$ から平面 $x=0$ までの距離は 1 である。よって四面体 $OABC$ の体積は $\frac{1}{3}\cdot1\cdot1=\frac{1}{3}$ である。

3 別解・背景

§ 平面の方程式を使う方法

$\overrightarrow{AB}=(0,0,2)$ と $\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-2)$ の両方に垂直なベクトルとして $\vec{n}=(1,-1,0)$ を取れます。点 $A(0,1,0)$ を通ることから、平面 ABC の方程式は

$$x-(y-1)=0,\qquad x-y+1=0$$

です。原点を通りこの平面に垂直な直線上の点は $H=(\lambda,-\lambda,0)$ と表せます。これを平面の式に代入すると $2\lambda+1=0$ なので、$H=(-1/2,1/2,0)$ を得ます。法線の方向だけでは H は決まらず、平面上にある条件を合わせて使っています。

2026 年度 北海道大学・文系 第 4 問

【数学（文系）第 4 問】〈2026 年度・前期日程〉

1 個のさいころを投げる試行を繰り返す。最初の持ち点は 1 とし，3 の目が出たときは持ち点を 3 倍，5 の目が出たときは持ち点を 5 倍，3 と 5 以外の目が出たときは持ち点を 2 倍する。たとえば 3 回試行して出た目が順に 6，3，5 のとき，持ち点は $1\times2=2,\ 2\times3=6,\ 6\times5=30$ と変化し，最後の持ち点は 30 である。次の問いに答えよ。

(1) 3 回試行したとき，最後の持ち点が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2) 4 回試行したとき，最後の持ち点が平方数となる確率を求めよ。ただし，平方数とは，ある自然数の 2 乗となる数のことであり，たとえば 4，9，16 は平方数である。

解説

持ち点は、倍率 $2,3,5$ を掛けて得られます。どの数を何回掛けたかをそれぞれ a,b,c とすれば、最終の持ち点は $2^a3^b5^c$ です。素因数分解が一意なので、割り切れる条件や平方数の条件を、この指数で表せます。掛ける順序は値には影響しませんが、確率を数えるときは各倍率がどの試行で現れるかを区別します。

倍率の確率は、2 倍が四つの目に対応して 2/3、3 倍と 5 倍がそれぞれ 1/6 です。三種類の倍率を等確率としてはいけません。同じ倍率の回数でも、面の選び方の数が異なります。出目を一つずつ列挙する代わりに、この確率を用いて倍率の並びを数えます。

(1) で 4 の倍数となる必要十分条件は $a\geqq2$ です。奇数の倍率 $3,5$ を何回掛けても 2 の因子は増えないため、2 倍の回数だけを見ればよいと分かります。三回のうちちょうど二回と、三回全部が 2 倍の場合に分けます。これらは重ならず、条件をすべて覆っています。

ちょうど二回の場合は、その位置の選び方が三通りです。残る一回は 3 倍または 5 倍で、合わせた確率が 1/3 です。従って

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27} $$

となります。三回全部の場合を、ちょうど二回の計算へ含めていないことを確認します。

(2) の平方数の条件は、指数 a,b,c がすべて偶数であることです。平方では元の自然数の素因数の指数がすべて二倍になり、逆にすべて偶数なら指数を半分にした自然数の平方となります。四回なので $a+b+c=4$ です。従って回数の組は、一種類を四回使う三組と、二種類を二回ずつ使う三組の、計六組に限られます。

一種類を四回の場合は、確率が $(2/3)^4,(1/6)^4,(1/6)^4$ です。二種類を二回ずつの場合は、一方の倍率が現れる二位置を選ぶので、各組に ${}_4\mathrm{C}_2=6$ を掛けます。残りの位置はもう一方の倍率となるため、さらに並べ替えを掛けてはいけません。例えば 2 倍と 3 倍なら $6(2/3)^2(1/6)^2$ です。

六組は異なる回数を表すため重ならず、確率を足して

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^4+2\left(\frac{1}{6}\right)^4+6\left\{2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^4\right\}=\frac{19}{54} $$

を得ます。括弧内の係数 2 は、2 倍と 3 倍、2 倍と 5 倍の二組をまとめたものです。

回数の条件を指数で整理し、可能な組を尽くしてから位置の選び方と倍率の確率を掛ける順序が要点です。回数の六組が等確率ではないことと、持ち点が同じでも倍率の順序を区別して数えることを明確にすれば、数の条件と確率の計算を正しく結び付けられます。

2 答案

(1) 3 と 5 以外の目が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ であり、このとき持ち点は 2 倍される。3 の目または 5 の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ であり、このときは 2 の因数は増えない。

3 回の試行のうち、2 倍される回数を X とする。最後の持ち点が 4 の倍数となるには、2 の因数が少なくとも 2 個必要なので、$X \geqq 2$ であればよい。したがって求める確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 $$

である。これを計算して

$$ 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{27} = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27} $$

となる。

(2) 4 回の試行後の持ち点は $2^a 3^b 5^c$ と表される。ただし、a は 3 と 5 以外の目が出た回数、b は 3 の目が出た回数、c は 5 の目が出た回数であり、$a+b+c=4$ である。

この数が平方数となるには、素因数分解におけるすべての指数が偶数であればよい。よって (a,b,c) は $(4,0,0),\ (0,4,0),\ (0,0,4),\ (2,2,0),\ (2,0,2),\ (0,2,2)$ のいずれかである。

それぞれの確率を足し合わせる。まず $P(4,0,0)=\left(\frac{2}{3}\right)^4$ である。また $P(0,4,0)+P(0,0,4)=2\left(\frac{1}{6}\right)^4$ である。さらに

$$ P(2,2,0)+P(2,0,2) = 2 \cdot \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 $$

であり、$P(0,2,2)=\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^4$ である。

したがって求める確率は

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 2 \cdot \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 . $$

整理すると

$$ \frac{16}{81} + \frac{2}{1296} + \frac{4}{27} + \frac{1}{216} = \frac{128+1+96+3}{648} = \frac{19}{54} $$

である。

3 別解・背景

平方数の判定では、素因数の指数が偶数であることが必要で、0 回も偶数に含まれます。$(4,0,0)$ のように一種類の倍率だけを使う場合も除きません。また、試行の順序を変えても最終的な持ち点は同じですが、確率を求める際にはその順序の数を数える必要があります。倍率の回数と、倍率が現れる位置を分けて考えると整理できます。