

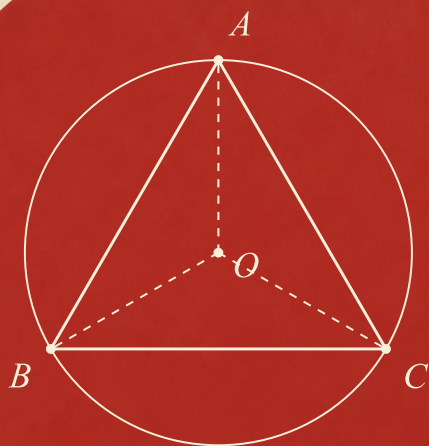
北海道大学

文系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

北海道大学

文系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編



はじめに

本書は、北海道大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	9
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	17
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	25
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	33
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	41
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	49
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	57
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	65
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	73
分野索引		81



2026 年度 北海道大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

関数 $f(x) = x^3 - 2x^2$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は $a > 2$ を満たす定数とする。

- (1) $f(x)$ の極値をすべて求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^a |f(x)| dx$ を求めよ。

1

解説

三つの小問では、極値、閉区間の最大、絶対値付き積分という異なる性質を調べます。同じ増減表を使える部分もありますが、関数の符号と導関数の符号を混同しないようにします。まず (1) の導関数は $f'(x) = x(3x-4)$ です。 $x < 0$ で正、 $0 < x < 4/3$ で負、 $x > 4/3$ で正となり、増加、減少、増加の順です。

従って $x = 0$ で極大値 0、 $x = 4/3$ で極小値 $-32/27$ です。導関数が零となるだけでは極値と判断できませんが、今回はどちらも前後で符号が変わります。極大値が零でも極大であることに変わりはありません。「最大値」と違い、近くの点との比較で定まる値です。

(2) は $0 \leq x \leq a$ という閉区間の最大です。内部の極値の候補だけでなく、両端 $x = 0, a$ も比較します。 $a > 2$ により $f(a) = a^2(a-2) > 0$ です。 $f(0) = 0$ 、内部の極小値は負なので、最大は端点 $x = a$ における $a^2(a-2)$ です。 a が指定の範囲内にある限り、この比較の結果は変わりません。

同じことは増減からも分かります。0 から $4/3$ までは減少、その後は増加なので、閉区間の最大はどちらかの端点です。 $a > 2$ という条件が、右端の値を左端より大きいと保証しています。条件を使わずに「右端で最大」とするのではなく、値の正負または比較を示します。

(3) で絶対値を外すには、導関数ではなく $f(x)$ 自身の符号を調べます。 $f(x) = x^2(x-2)$ なので、 $0 < x < 2$ で負、 $x > 2$ で正です。 $x = 0$ では零となりますが、二重の因子なのでその前後で符号は変わりません。積分範囲内では $x = 2$ だけを切り替え点とします。

従って積分は $-\int_0^2 f(x) dx + \int_2^a f(x) dx$ です。原始関数を $F(x) = x^4/4 - 2x^3/3$ とすると、

$$-(F(2) - F(0)) + (F(a) - F(2)) = F(a) - 2F(2).$$

$F(0) = 0$ であり、 $F(2) = -4/3$ なので、結果は $a^4/4 - 2a^3/3 + 8/3$ です。負の部分の積分を符号反転するため、 $F(2)$ が二回差し引かれることを式で確認します。

絶対値を積分の外へ移して、元の定積分の絶対値を取る方法は使えません。正と負の面積が相殺された後の値になるからです。今回は $a > 2$ で符号の異なる両区間が含まれており、それぞれを非負の面積として足す必要があります。 a が 2 に近づく場合には、式の値が $4/3$ に近づき、負の部分だけの面積と一致することも検算になります。

2 答案

(1) $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$ である。したがって、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$ である。

導関数の符号を調べると、 $x < 0$ で $f'(x) > 0$ 、 $0 < x < \frac{4}{3}$ で $f'(x) < 0$ 、 $x > \frac{4}{3}$ で $f'(x) > 0$ である。よって $x = 0$ で極大、 $x = \frac{4}{3}$ で極小となる。それぞれの値は $f(0) = 0$,

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} = -\frac{32}{27}$$

である。したがって極大値は 0、極小値は $-\frac{32}{27}$ である。

(2) $0 \leq x \leq a$ に含まれる極値候補は $x = 0$ と $x = \frac{4}{3}$ であり、端点 $x = a$ も比較する。各値は

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{32}{27}, \quad f(a) = a^3 - 2a^2 = a^2(a - 2)$$

である。ここで $a > 2$ より $a^2(a - 2) > 0$ であるから、 $f(a) > f(0) > f\left(\frac{4}{3}\right)$ となる。

よって $0 \leq x \leq a$ における最大値は $a^3 - 2a^2$ である。

(3) $f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$ であり、 $x^2 \geq 0$ だから、 $0 \leq x \leq 2$ では $f(x) \leq 0$ 、 $2 \leq x \leq a$ では $f(x) \geq 0$ である。 $a > 2$ なので、絶対値を外すと $\int_0^a |f(x)| dx = -\int_0^2 f(x) dx + \int_2^a f(x) dx$ となる。

原始関数を $F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$ とおくと、 $F(0) = 0$, $F(2) = \frac{16}{4} - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$ である。したがって $-\int_0^2 f(x) dx = -(F(2) - F(0)) = \frac{4}{3}$, $\int_2^a f(x) dx = F(a) - F(2) = \frac{a^4}{4} - \frac{2a^3}{3} + \frac{4}{3}$. ゆえに $\int_0^a |f(x)| dx = \frac{a^4}{4} - \frac{2a^3}{3} + \frac{8}{3}$ である。

3 別解・背景

極値を調べた点 $x = 4/3$ と、絶対値を外す際の分割点 $x = 2$ は役割が違います。前者は増減が切り替わる点、後者は関数の値の符号が切り替わる点です。グラフを考えると、 $0 < x < 2$ の部分は x 軸より下にあり、その部分の面積を正に数えるために積分の符号を反転させています。



2026 年度 北海道大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

数列 $\{a_n\}$ は、すべての項が正であり、次の条件を満たすとする。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \frac{1}{a_n + 2}$ とおく。 b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1 解説

分数で次の項を表す漸化式ですが、設問の置換を使うと一次の関係へ変わります。元の式から $a_{n+1} = 2/(a_n + 1)$ です。すべての項が正という条件により、 $a_n + 1$ 、 $a_n + 2$ は零にならず、この除法と b_n の定義が使えます。分母の条件を確認してから、指定の b_{n+1} へ代入します。

分母の中の分数を整理すると、

$$b_{n+1} = \frac{1}{2/(a_n + 1) + 2} = \frac{a_n + 1}{2(a_n + 2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a_n + 2} \right) = \frac{1 - b_n}{2}.$$

最後の変形は、 $a_n + 1 = (a_n + 2) - 1$ を使っています。分母に $a_n + 2$ が現れたことで、置換の定義をそのまま使えるようになります。

(2) では定数項を含む一次の漸化式を等比数列へ直します。右辺に一定値 c を入れても c に戻るよう、 $c = (1-c)/2$ を解くと $c = 1/3$ です。両辺からこの値を引けば、 $b_{n+1} - 1/3 = -(1/2)(b_n - 1/3)$ です。定数項が消え、差が公比 $-1/2$ の等比数列となります。

初項は $b_1 = 1/(4+2) = 1/6$ です。等比数列の初項は b_1 ではなく、 $b_1 - 1/3 = -1/6$ なので、

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{2^n + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

です。時刻や番号の起点を第 1 項に取ったため、公比の指数は $n-1$ です。符号を整理するときは、初項を代入して正の $1/6$ に戻ること確かめます。

元の項は $a_n = 1/b_n - 2$ なので、一般項は

$$a_n = \frac{2^n - 2(-1)^n}{2^n + (-1)^n}$$

となります。通分の際には分母全体へ 2 を掛けるため、分子の $(-1)^n$ の係数が -2 になることを確認します。偶数と奇数に分けても書けますが、符号の累乗を残せば一つの式で表せます。

この式の分母は、 $n=1$ で 1、 $n \geq 2$ で少なくとも $2^n - 1 > 0$ です。分子も奇数なら $2^n + 2 > 0$ 、偶数なら $n \geq 2$ で $2^n - 2 > 0$ です。従ってすべての自然数で定義され、元の正值条件を満たします。分数の一般項を得た後に分母と正值を確かめることが大切です。

$n=1$ では 4、 $n=2$ では $2/5$ となり、元の初項と最初の漸化式に一致します。公比が負なので b_n は $1/3$ の上下を交互に取りますが、各項の正值とは矛盾しません。分数の漸化式を置換で一次式へ変え、一定値との差から等比数列を作り、最後に逆変換する三段階を順に示します。

公比の負号は、元の数列が負になるという意味ではありません。一般項から $a_n - 1 = -3(-1)^n / \{2^n + (-1)^n\}$ なので、奇数の項は一より大きく、偶数の項は一より小さくなります。それでも分子分母の正値確認により全項は正です。一は元の漸化式へ代入しても次に一を与える値で、この値を中心に上下を交互に取る様子が、置換後の等比数列の負の公比に対応します。

2 答案

(1) 漸化式より $a_{n+1} = \frac{2}{a_n+1}$ である。したがって

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{2}{a_n+1} + 2} = \frac{a_n + 1}{2(a_n + 2)}$$

となる。

ここで $\frac{a_n+1}{a_n+2} = 1 - \frac{1}{a_n+2} = 1 - b_n$ であるから、 $b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ である。

(2) (1) より $b_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b_n$ である。この漸化式の一定値を c とおくと $c = \frac{1}{2}(1 - c)$ より $c = \frac{1}{3}$ である。したがって $b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(b_n - \frac{1}{3})$ となる。

また $b_1 = \frac{1}{a_1+2} = \frac{1}{6}$ であるから、 $b_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ である。よって

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

となり、 $b_n = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} = \frac{2^n + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$ を得る。

したがって

$$a_n = \frac{1}{b_n} - 2 = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + (-1)^n} - 2 = \frac{2^n - 2(-1)^n}{2^n + (-1)^n}$$

である。

3 別解・背景

公比が負であるため、 $b_n - 1/3$ の符号は一項ごとに変わります。一方、絶対値は一項進むごとに半分になります。したがって b_n は $1/3$ の上下を交互に動きながら近づき、 $a_n = 1/b_n - 2$ は 1 に近づきます。元の漸化式に $a_n = 1$ を代入すると $a_{n+1} = 1$ となることも、この結果と対応します。