大学入試過去問シリーズ

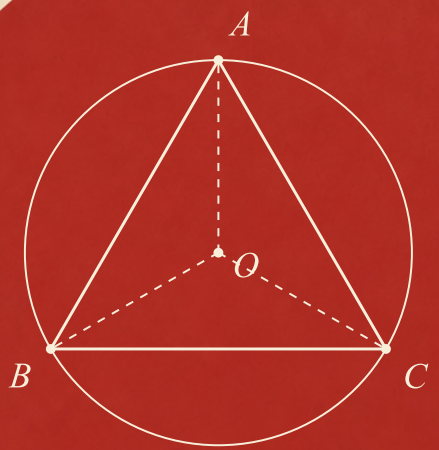
北海道大学

理系（前期・後期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

北海道大学

理系数学

2017〜2026 年度　前期・後期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、北海道大学の前期･後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

共通問題も、各区分における小問の順序と番号に従います。旧課程の選択問題や京都大学の理系甲・乙は、元の区分を併記します。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017～2026 年度)、後期 9 年（2017～2019、2021～2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	1
2025 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	19
2024 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	38
2023 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	56
2022 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	74
2021 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	92
2020 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問	110
2019 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	120
2018 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	138
2017 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問	156

分野索引 …… 174

2026 年度 北海道大学・理系 第 1 問（前期）

【数学（理系）第 1 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たすとする。

$$a_1 = -8, \qquad a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) $a_n \neq -2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n + 2}$ とおく。b_{n+1} を b_n で表せ。

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

$b_n = 1/(a_n+2)$ を定義する前に、分母 a_n+2 が 0 にならないことを示す必要があります。このために(1)の証明が置かれています。$a_{n+1} = -2$ と仮定して元の漸化式へ代入すると、$a_n = -2$ に戻ってしまいます。初項 $a_1 = -8$ から、帰納法によってどの項でも -2 にならないと結論できます。

また、$a_n = -1$ なら $a_{n+1}(a_n+1) = 2$ の左辺が 0 となります。したがって a_n+1 も 0 ではなく、$a_{n+1} = 2/(a_n+1)$ という形へ変形できます。この二つの分母の確認を済ませてから、b_{n+1} を計算しましょう。

(2)では

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2(a_n + 2)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a_n + 2}\right)$$

と変形します。分子を $(a_n + 2) - 1$ に分けると、b_n の定義がそのまま現れます。得られた $b_{n+1} = (1 - b_n)/2$ は、定数項のある一次の漸化式です。

一定値 c が $c = (1-c)/2$ を満たすように取ると $c = 1/3$ です。両辺から $1/3$ を引けば、$b_n - 1/3$ は公比 $-1/2$ の等比数列になります。今回は $b_1 = -1/6$ なので、その等比数列の初項は $-1/2$ です。この値を使うと $b_n = 1/3 + (-1/2)^n$ と求められます。

最後に $a_n = 1/b_n - 2$ へ戻します。b_n の分子は $2^n + 3(-1)^n$ です。偶数 n では正で、奇数 n では $2^n - 3$ ですが、$2^n = 3$ となる整数 n はありません。したがって、求めた一般項の分母も全項で 0 になりません。

(1) の証明は、-2 という値へ次の項で入るなら、直前の項も -2 でなければならないという性質を使います。初項はその値ではないため、どの段階でも入れません。逆向きにさかのぼる式を、帰納法の仮定との矛盾として使う方法です。

$a_n = -1$ を除く根拠は別にあります。もとの積の式の左辺が 0 となり右辺 2 と一致しないので、その値は初めから不可能です。従って $a_{n+1} = 2/(a_n+1)$ という表示にした際にも、未確認の除算をしていません。a_n+2 と a_n+1 の二つは、それぞれ異なる変形を保証します。

b_n の漸化式は定数項があるため、そのまま等比数列とは言えません。固定値 $1/3$ を引くと定数項が消え、$b_{n+1} - 1/3 = -(b_n - 1/3)/2$ となります。公比が負なので差の符号は交互に変わり、一般項にも $(-1)^n$ が現れます。

初項の差は $b_1 - 1/3 = -1/2$ です。等比の公式ではこれに $(-1/2)^{n-1}$ を掛けるので、積は $(-1/2)^n$ となります。指数を $n-1$ のまま残すと係数がずれるため、$n = 1$ を入れて $b_1 = -1/6$ へ戻ることを確認します。

a_n へ戻すときは b_n が 0 ではないことも確かめます。偶数 n の分子 2^n+3 は正で、奇数 n の 2^n-3 も 0 にはなりません。実際 $n=1$ では 2、$n \geqq 2$ では 4 以上なので、2 の整数べきは 3 になりません。一般項に $n=1$ を入れると -8 が得られ、隣り合う項を元の積の式へ代入すれば 2 となります。変換で得た式が全項で定義され、初期条件と漸化式の両方を満たすと確定できます。

2 答案

(1) $a_1=-8$ であるから、$a_1 \neq -2$ である。

ある正の整数 n について $a_n \neq -2$ と仮定する。もし $a_{n+1}=-2$ ならば、漸化式 $a_{n+1}(a_n+1)=2$ に代入して $-2(a_n+1)=2$ となり、$a_n=-2$ を得る。これは仮定に反するので、$a_{n+1} \neq -2$ である。

以上より、数学的帰納法によって $a_n \neq -2$ $(n=1,2,3,\ldots)$ が成り立つ。

(2) (1) より $a_n+2 \neq 0$ であるから、b_n は定義できる。漸化式から $a_{n+1}=\frac{2}{a_n+1}$ であり、

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}+2}=\frac{1}{\dfrac{2}{a_n+1}+2}=\frac{a_n+1}{2(a_n+2)}$$

となる。さらに $\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}+2}=1-\frac{1}{a_n+2}=1-b_n$ であるから、$b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)$ である。

(3) (2) より $b_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b_n$ である。この漸化式の固定値は $c=\frac{1}{2}(1-c)$ を満たすので、$c=\frac{1}{3}$ である。したがって $b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$ である。

初項は $b_1=\frac{1}{a_1+2}=\frac{1}{-6}=-\frac{1}{6}$ であるから、$b_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$ である。よって

$$b_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

となり、$b_n=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2^n+3(-1)^n}{3\cdot 2^n}$ を得る。

したがって

$$a_n=\frac{1}{b_n}-2=\frac{3\cdot 2^n}{2^n+3(-1)^n}-2=\frac{2^n-6(-1)^n}{2^n+3(-1)^n}$$

である。

3 別解・背景

-2 は元の漸化式に代入すると次の項も -2 になる値です。(1)では、この値に途中から到達できるかを逆向きに調べています。一方、1 も一定の数列を作る値であり、変換後の b_n では 1/3 に対応します。公比 $-1/2$ の等比数列を解いた結果、b_n は 1/3 に近づき、元の数列は 1 に近づきます。

2 2026 年度 北海道大学・理系 第 2 問（前期）

【数学（理系）第 2 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

関数 $f(x)$ を次によって定める。

$$f(x)=\int_0^x \left\{\sin(x-t)-\frac{t}{4}\right\}^2 dt$$

次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^x t\sin(x-t)dt$ を x の式で表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ。

1 解説

積分では t を変数として計算し、x は積分の上端にも被積分関数にも含まれています。まず $x-t$ というまとまりを u に置き換えると、三角関数の中が単純になります。$u=x-t$ なら $t=x-u$、$dt=-du$ です。$t=0$ から $t=x$ へ進むと $u=x$ から $u=0$ へ進むため、負号と積分範囲の向きを合わせて処理します。

(1)の置換後の積分は

$$\int_0^x (x-u)\sin u\,du = x\int_0^x \sin u\,du - \int_0^x u\sin u\,du$$

です。第一項では x は積分変数ではないため外へ出せます。第二項は、u を微分する側、$\sin u$ を積分する側に選んで部分積分します。両者を加えると $x\cos x$ の項が消え、$x-\sin x$ が残ります。

(2)では二乗を展開してから、三つの積分へ分けましょう。交差項の係数は $-t/2$ です。この項に(1)の結果を使うと、残るのは $\sin^2(x-t)$ と t^2 の積分です。前者は同じ置換の後、$\sin^2 u=(1-\cos 2u)/2$ で次数を下げれば計算できます。

(3)では、求めた式をそのまま x^3 で割ると、$\sin x$ と $\sin 2x$ の二つの項がそれぞれ大きくなり、極限を別々に取れません。先に倍角の公式でまとめると

$$\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}=\frac{\sin x}{2}(1-\cos x)$$

です。$\sin x$ と $1-\cos x$ に分けることで、分母の x^3 を x と x^2 に分配できます。さらに $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ を使うと、すべて $\sin t/t$ の基本極限に帰着します。近似展開を使わず、両側からの極限まで同じ式で扱えます。

被積分関数の x は、t による積分中は固定した値です。そのため $x-t$ を三角関数の角として持っていても、x を t と同じ変数として微分しません。置換の際には上下端を同時に変え、$dt=-du$ の負号で範囲を逆にして整理します。この操作は負の x でも定積分の向きの規則により成立します。

二乗の交差項は $2\sin(x-t)(-t/4)=-t\sin(x-t)/2$ です。係数を $-1/4$ のままにすると、(2) で一次の x が相殺せず、(3) で極限を計算できなくなります。正しく展開すれば、正弦の二乗の積分から出る $x/2$ と、(1) の結果の $-x/2$ が消えます。

残った二つの正弦は、各項を x^3 で割って別々に極限を取ると有限な値になりません。和としては一次の項が相殺しているため、倍角の公式による因数分解でその相殺を式に表します。$\sin x$ が x と同じ程度、$1-\cos x$ が x^2 と同じ程度となる形が得られます。

半角の式を使うと、$(1-\cos x)/x^2$ の係数は $1/2$ です。$x/2$ を基本極限の変数として分母にも同じ値を置くことが、この係数を落とさない要点です。平方のため左右どちらから近づいても同じ極限となり、最終値 $1/4+1/48=13/48$ が得られます。級数や繰り返し微分による極限公式を使わず、基本極限だけで完結できます。

2 答案

(1) $u=x-t$ とおくと、$t=x-u$ である。$t=0$ のとき $u=x$、$t=x$ のとき $u=0$ であるから、

$$\int_0^x t\sin(x-t)\,dt=\int_x^0 (x-u)\sin u\,(-du)=\int_0^x (x-u)\sin u\,du$$

となる。

よって $\int_0^x (x-u)\sin u\,du=x\int_0^x \sin u\,du-\int_0^x u\sin u\,du$ である。ここで $\int_0^x \sin u\,du=1-\cos x$ であり、部分積分により

$$\int_0^x u\sin u\,du=[-u\cos u]_0^x+\int_0^x \cos u\,du=-x\cos x+\sin x$$

である。したがって $\int_0^x t\sin(x-t)\,dt=x(1-\cos x)-(-x\cos x+\sin x)=x-\sin x$ である。

(2) 被積分関数を展開すると

$$\left\{\sin(x-t)-\frac{t}{4}\right\}^2=\sin^2(x-t)-\frac{t}{2}\sin(x-t)+\frac{t^2}{16}$$

である。したがって

$$f(x)=\int_0^x \sin^2(x-t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^x t\sin(x-t)\,dt+\frac{1}{16}\int_0^x t^2\,dt$$

となる。

まず $u=x-t$ とおくと $\int_0^x \sin^2(x-t)\,dt=\int_0^x \sin^2 u\,du$ であり、$\sin^2 u=\dfrac{1-\cos 2u}{2}$ より $\int_0^x \sin^2 u\,du=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$ である。また (1) より $\int_0^x t\sin(x-t)\,dt=x-\sin x$ で、$\int_0^x t^2\,dt=\frac{x^3}{3}$ である。

以上を代入して $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{1}{2}(x-\sin x)+\frac{x^3}{48}$ となる。よって $f(x)=\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x^3}{48}$ である。

(3) (2) の結果を用いる。$\sin 2x=2\sin x\cos x$ であるから、

$$\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}=\frac{\sin x}{2}-\frac{2\sin x\cos x}{4}=\frac{\sin x}{2}(1-\cos x)$$

である。したがって

$$\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{1}{48}$$

となる。

また $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ より $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$ であるから、$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ である。ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{48}=\frac{13}{48}$$

である。

3 別解・背景

三角関数の基本極限を使う前に、打ち消し合う項をまとめることがポイントです。$\sin x/x$ は有限の極限を持ちますが、$\sin x/x^3$ は同じようには扱えません。本問では、差を積 $\sin x(1-\cos x)$ に変えることで、三次の小さい量であることが式から分かります。

3　2026 年度 北海道大学・理系 第 3 問（前期）

【数学（理系）第 3 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

複素数平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C を考える。次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 α は $|\alpha+\overline{\alpha}|=|\alpha-\overline{\alpha}|$ を満たし，α の偏角 θ は $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ を満たすとする。α を求めよ。

(2) β は虚部が正の複素数で，$\beta^3=1$ を満たすとする。点 z が β を除く C 上を動くとき，$w(z-\beta)=1$ を満たす点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

1　解説

(1)では $\alpha=x+yi$ と実部・虚部に分けます。共役との和は $2x$、差は $2yi$ なので、絶対値条件は $|x|=|y|$ となります。単位円上という条件だけなら四つの候補がありますが、偏角の範囲が第二象限を指定しているので $x<0, y>0$ です。この符号を使って $y=-x$ とし、$x^2+y^2=1$ へ代入します。

(2)では、z が動く円の条件を、求めたい w の条件へ移します。関係式 $w(z-\beta)=1$ から $w\neq 0$ なので、

$$z=\beta+\frac{1}{w}$$

と解けます。これを $|z|=1$ に代入し、両辺に $|w|$ を掛けると、分母のない式 $|\beta w+1|=|w|$ になります。

両辺を二乗すると、複素数とその共役の積で絶対値の二乗を表せます。$|\beta|=1$ であることから $w\bar{w}$ の項が打ち消され、残るのは $\beta w+\bar{\beta}\bar{w}+1=0$ です。二つの項は互いに共役なので、その和は $2\,\mathrm{Re}(\beta w)$ です。ここで $w=u+vi$、$\beta=-1/2+(\sqrt{3}/2)i$ を代入すれば、直線の式になります。

軌跡の問題では、導いた方程式が必要条件であるだけでは足りません。直線上の任意の w から $z=\beta+1/w$ を作れることも確かめます。この直線は原点を通らないので、まず $1/w$ が定義できます。変形を逆にたどると $|z|=1$ となり、$1/w\neq 0$ から $z\neq\beta$ も満たします。したがって、直線上には除外する点がありません。図では実軸・虚軸との切片を示して、直線全体を描きます。

(1) の絶対値だけなら $x=y$ と $x=-y$ の二直線があり、単位円との交点は四つです。偏角の開区間は第二象限を示しており、実部が負で虚部が正という二条件で一つに絞ります。軸上の点は開区間から除かれ、候補にもならないことを確認できます。

三乗して 1 となる数は角が $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ の三種類です。そのうち虚部が正なのは $2\pi/3$ だけなので、β は一意です。積 βw の実部は $-u/2-\sqrt{3}v/2$ です。虚数単位の積 $i^2=-1$ により v の項も負となるため、直線の傾きの符号を誤らないようにします。

分母を払う際は $w\neq 0$ を既に示しています。円上から除かれた $z=\beta$ では元の式が成立せず、w は無限に大きくなる方向へ向かいますが、有限の特定の一点が除外されるわけではありません。直線の式自体が原点を通らないため、直線上の全ての有限の点に逆数を使えます。

逆変換で作った z は、絶対値の等式により円上となり、$1/w$ が 0 でないことにより除外点 β ではありません。この二つの条件を別々に確かめれば全直線が実現します。例えば実軸切片 $w=1$ からは $z=\beta+1$ が戻り、その絶対値も 1 です。切片の計算と元の式の確認が、図の方向を確かめる具体例になります。

2 答案

(1) $\alpha = x+yi$ とおく。α は半径 1 の円 C 上にあるので $x^2+y^2=1$ である。また $\alpha+\overline{\alpha}=2x$, $\alpha-\overline{\alpha}=2yi$ であるから、条件 $|\alpha+\overline{\alpha}|=|\alpha-\overline{\alpha}|$ は $|2x|=|2yi|$ すなわち $|x|=|y|$ である。

偏角 θ が $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ を満たすので、α は第 2 象限にあり、$x<0$, $y>0$ である。したがって $|x|=|y|$ より $y=-x$ である。これを $x^2+y^2=1$ に代入すると $2x^2=1$ であり、$x<0$ だから $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。よって $\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ である。

(2) β は虚部が正で $\beta^3=1$ を満たす 1 でない 3 乗根であるから、

$$\beta=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。

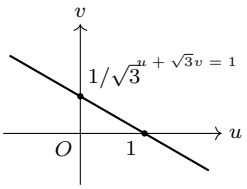
条件 $w(z-\beta)=1$ より、$w\neq 0$ であり、$z=\beta+\frac{1}{w}$ である。点 z は C 上にあるから、$\left|\beta+\frac{1}{w}\right|=1$ である。両辺に $|w|$ を掛けると $|\beta w+1|=|w|$ となる。両辺を 2 乗して $(\beta w+1)(\overline{\beta}\,\overline{w}+1)=w\overline{w}$ を得る。ここで $|\beta|=1$ であるから、左辺を展開して $w\overline{w}$ を消すと $\beta w+\overline{\beta}\,\overline{w}+1=0$ となる。$w=u+vi$ とおく。$\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから、

$$\beta w+\overline{\beta}\,\overline{w}=2\,\mathrm{Re}(\beta w)=-u-\sqrt{3}v$$

である。したがって $-u-\sqrt{3}v+1=0$ すなわち $u+\sqrt{3}v=1$ を得る。

逆に、直線 $u+\sqrt{3}v=1$ 上の点 $w=u+vi$ をとる。この直線は原点を通らないので $w\neq 0$ である。また上の計算を逆にたどると $|\beta w+1|=|w|$ となる。そこで $z=\beta+1/w$ とおけば $|z|=1$ であり、$1/w\neq 0$ だから $z\neq\beta$ でもある。したがって直線上のすべての点 w が実際に得られる。

よって点 w の描く図形は、$w=u+vi$ としたときの直線 $u+\sqrt{3}v=1$ 全体である。この直線は実軸と $(1,0)$ で交わり、虚軸と $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ で交わる。



3 別解・背景

z が β へ近づくと $z-\beta$ は 0 へ近づき、$w=1/(z-\beta)$ の絶対値は大きくなります。元の円から一点を除いたことが、像の直線から有限の一点を除くことにはなっていません。そのため、軌跡を円の像として扱う際も、除外点をそのまま移すのではなく、逆向きの構成で確認する必要があります。

2026 年度 北海道大学・理系 第 4 問（前期）

【数学（理系）第 4 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

O を原点とする座標空間に 2 点 $P(1,\,0,\,3)$, $Q(0,\,2,\,3)$ をとる。実数 h は $h>3$ を満たすとし，点 $C(0,\,0,\,h)$ をとる。3 点 C, P, Q を通る平面を α とする。さらに，α と x 軸との交点を A，α と y 軸との交点を B とおく。四面体 $OABC$ の体積を V とする。次の問いに答えよ。

(1) A の x 座標を h を用いて表せ。

(2) V を h を用いて表せ。

(3) h が $h>3$ を満たす実数全体を動くとき，V の最小値を求めよ。

解説

四面体の頂点 A, B, C は、三つの座標軸上にあります。平面の方程式を一般形で置くこともできますが、今回は三つの切片を直接使うと計算が短くなります。$A=(a,0,0)$、$B=(0,b,0)$、$C=(0,0,h)$ と置けば、平面は $x/a+y/b+z/h=1$ と表せます。

点 P を代入した式には a, h だけが現れ、点 Q を代入した式には b, h だけが現れます。このように、二つの切片は別々の一次方程式で求められます。$h>3$ なので $h-3$ は正で、得られる $a=h/(h-3)$、$b=2h/(h-3)$ も正です。したがって、これらの座標はそのまま辺 OA, OB の長さになります。

(2)では三角形 OAB を底面に選びます。$OA\perp OB$ なので底面積は $ab/2$、点 C から xy 平面までの高さは h です。体積は $(ab/2)\cdot h/3=abh/6$ であり、三つの切片の積に $1/6$ を掛ける理由もここから分かります。

(3)では、V を h だけの式にしてから微分します。分子・分母を整理すると

$$V'(h)=\frac{h^2(h-9)}{3(h-3)^3}$$

です。定義域 $h>3$ では分母と h^2 がともに正なので、符号を決めるのは $h-9$ だけです。$3<h<9$ で減少し、$h>9$ で増加するため、$h=9$ で最小となります。

$h=3$ は定義域に含まれず、そこへ近づくと切片が大きくなります。一方、h を大きくすると切片は小さくなりますが、高さ h が大きくなります。この二つの変化の間で最小値が現れることが、増減の結果に対応しています。

平面を一般形 $ux+vy+wz=d$ で考えると、C から $d=wh$、P, Q から $u=w(h-3), 2v=w(h-3)$ となります。もし $w=0$ なら全係数が 0 となって平面を表さないので、$w\neq 0$ です。従って切片は全て有限に求まり、切片形を使う前提も保証できます。

平面の二つの横方向の切片は、P と Q の横座標 1 と 2 の比を反映して $b=2a$ です。$h>3$ によりどちらも正なので、座標の絶対値を取る必要がなく、そのまま OA, OB として使えます。$h=3$ ではこの表現の分母が 0 となりますが、指定された定義域の外です。

底面 OAB は xy 平面上の直角三角形なので、面積にまず $1/2$ が付きます。さらに三角錐の体積は底面積と高さの積の $1/3$ です。この二つを合わせた $1/6$ であり、直方体や三角柱の体積の係数と混同しないようにします。

微分後の分母は定義域全体で正です。したがって $h=9$ の左右で減少から増加へ変わることが、開区間全体での最小値を保証します。左右の端で発散することも、この増減と整合します。$h=9$ では $a=3/2, b=3$、底面積は $9/4$ なので、体積は $(9/4)\cdot 9/3=27/4$ です。切片へ戻したこの計算で、最小値が実際の四面体として達成されることを確かめられます。

2　答案

(1) 平面 α は z 軸上の点 $C(0,0,h)$ を通る。さらに x 軸との交点を A、y 軸との交点を B とするので、$A=(a,0,0),\quad B=(0,b,0),\quad C=(0,0,h)$ とおける。このとき平面 α は切片形で $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{h}=1$ と表せる。

点 $P(1,0,3)$ は α 上にあるから、$\frac{1}{a}+\frac{3}{h}=1$ である。したがって $\frac{1}{a}=1-\frac{3}{h}=\frac{h-3}{h}$ となり、$a=\frac{h}{h-3}$ を得る。よって A の x 座標は $\frac{h}{h-3}$ である。

(2) 同様に、点 $Q(0,2,3)$ は α 上にあるから、$\frac{2}{b}+\frac{3}{h}=1$ である。よって $\frac{2}{b}=\frac{h-3}{h}$ となり、$b=\frac{2h}{h-3}$ である。

四面体 $OABC$ は 3 つの辺 OA,OB,OC が互いに座標軸方向にあるので、体積は $V=\frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC$ である。ここで $h>3$ だから a,b,h はすべて正であり、$OA=a=\frac{h}{h-3},\quad OB=b=\frac{2h}{h-3},\quad OC=h$ である。したがって

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{h}{h-3}\cdot\frac{2h}{h-3}\cdot h=\frac{h^3}{3(h-3)^2}$$

である。

(3) $V=\frac{h^3}{3(h-3)^2}$ とおく。$h>3$ において微分すると、$V'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3h^2(h-3)^2-2h^3(h-3)}{(h-3)^4}$ である。分子を整理して $V'=\frac{h^2(h-9)}{3(h-3)^3}$ を得る。$h>3$ では $h^2>0$、$(h-3)^3>0$ であるから、V' の符号は $h-9$ の符号で決まる。したがって $3<h<9$ で $V'<0$、$h>9$ で $V'>0$ である。

また、$h\to 3+0$ のとき $V\to\infty$、$h\to\infty$ のときも $V\to\infty$ である。よって V は $h=9$ で最小となる。その値は $V(9)=\frac{9^3}{3\cdot 6^2}=\frac{729}{108}=\frac{27}{4}$ である。

3　別解・背景

§ 相加・相乗平均で最小値を求める

$h>3$ より、$(h-3)/2,(h-3)/2,3$ はすべて正であり、その和は h です。相加・相乗平均の関係から

$$\frac{h}{3}\geqq\sqrt[3]{\frac{3(h-3)^2}{4}}$$

なので、三乗して整理すると

$$h^3\geqq\frac{81}{4}(h-3)^2,\qquad V=\frac{h^3}{3(h-3)^2}\geqq\frac{27}{4}.$$

等号は $(h-3)/2=3$、すなわち $h=9$ のときに成立します。この方法でも、下限を示すだけでなく、その値が実際に取れることまで確認できています。