

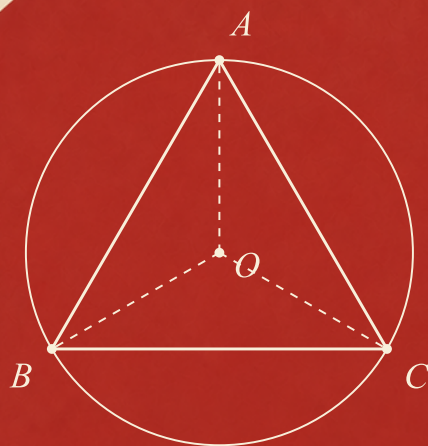
北海道大学

理系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

北海道大学 理系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編



はじめに

本書は、北海道大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	21
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	31
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	41
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	51
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	61
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	71
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	81
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	91
分野索引		101



2026 年度 北海道大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たすとする。

$$a_1 = -8, \quad a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) $a_n \neq -2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n + 2}$ とおく。 b_{n+1} を b_n で表せ。

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1

解説

$b_n = 1/(a_n + 2)$ を定義する前に、分母 $a_n + 2$ が 0 にならないことを示す必要があります。このために(1)の証明が置かれています。 $a_{n+1} = -2$ と仮定して元の漸化式へ代入すると、 $a_n = -2$ に戻ってしまいます。初項 $a_1 = -8$ から、帰納法によってどの項でも -2 にならないと結論できます。

また、 $a_n = -1$ なら $a_{n+1}(a_n + 1) = 2$ の左辺が 0 となります。したがって a_{n+1} も 0 ではなく、 $a_{n+1} = 2/(a_n + 1)$ という形へ変形できます。この二つの分母の確認を済ませてから、 b_{n+1} を計算しましょう。

(2)では

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2(a_n + 2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a_n + 2} \right)$$

と変形します。分子を $(a_n + 2) - 1$ に分けると、 b_n の定義がそのまま現れます。得られた $b_{n+1} = (1 - b_n)/2$ は、定数項のある一次の漸化式です。

一定値 c が $c = (1-c)/2$ を満たすように取ると $c = 1/3$ です。両辺から $1/3$ を引けば、 $b_n - 1/3$ は公比 $-1/2$ の等比数列になります。今回は $b_1 = -1/6$ なので、その等比数列の初項は $-1/2$ です。この値を使うと $b_n = 1/3 + (-1/2)^n$ と求められます。

最後に $a_n = 1/b_n - 2$ へ戻します。 b_n の分子は $2^n + 3(-1)^n$ です。偶数 n では正で、奇数 n では $2^n - 3$ ですが、 $2^n = 3$ となる整数 n はありません。したがって、求めた一般項の分母も全項で 0 になりません。

(1) の証明は、 -2 という値へ次の項で入るなら、直前の項も -2 でなければならないという性質を使います。初項はその値ではないため、どの段階でも入れません。逆向きにさかのぼる式を、帰納法の仮定との矛盾として使う方法です。

$a_n = -1$ を除く根拠は別にあります。もとの積の式の左辺が 0 となり右辺 2 と一致しないので、その値は初めから不可能です。従って $a_{n+1} = 2/(a_n + 1)$ という表示にした際にも、未確認の除算をしていません。 a_{n+2} と a_{n+1} の二つは、それぞれ異なる変形を保証します。

b_n の漸化式は定数項があるため、そのまま等比数列とは言えません。固定値 $1/3$ を引くと定数項が消え、 $b_{n+1} - 1/3 = -(b_n - 1/3)/2$ となります。公比が負なので差の符号は交互に変わり、一般項にも $(-1)^n$ が現れます。

初項の差は $b_1 - 1/3 = -1/2$ です。等比の公式ではこれに $(-1/2)^{n-1}$ を掛けるので、積は $(-1/2)^n$ となります。指数を $n-1$ のまま残すと係数がずれるため、 $n=1$ を入れて $b_1 = -1/6$ へ戻ることを確認します。

a_n へ戻すときは b_n が 0 ではないことも確かめます。偶数 n の分子 $2^n + 3$ は正で、奇数 n の $2^n - 3$ も 0 にはなりません。実際 $n=1$ では 2、 $n \geq 2$ では 4 以上なので、2 の整数べきは 3 になりません。一般項に $n=1$ を入れ

ると -8 が得られ、隣り合う項を元の積の式へ代入すれば 2 となります。変換で得た式が全項で定義され、初期条件と漸化式の両方を満たすと確定できます。

2 答案

(1) $a_1 = -8$ であるから、 $a_1 \neq -2$ である。

ある正の整数 n について $a_n \neq -2$ と仮定する。もし $a_{n+1} = -2$ ならば、漸化式 $a_{n+1}(a_n + 1) = 2$ に代入して $-2(a_n + 1) = 2$ となり、 $a_n = -2$ を得る。これは仮定に反するので、 $a_{n+1} \neq -2$ である。

以上より、数学的帰納法によって $a_n \neq -2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つ。

(2) (1) より $a_n + 2 \neq 0$ であるから、 b_n は定義できる。漸化式から $a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$ であり、

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{2}{a_n + 1} + 2} = \frac{a_n + 1}{2(a_n + 2)}$$

となる。さらに $\frac{a_n + 1}{a_n + 2} = 1 - \frac{1}{a_n + 2} = 1 - b_n$ であるから、 $b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ である。

(3) (2) より $b_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b_n$ である。この漸化式の固定値は $c = \frac{1}{2}(1 - c)$ を満たすので、 $c = \frac{1}{3}$ である。したがって $b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(b_n - \frac{1}{3})$ である。

初項は $b_1 = \frac{1}{a_1 + 2} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$ であるから、 $b_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ である。よって

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

となり、 $b_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{2^n + 3(-1)^n}{3 \cdot 2^n}$ を得る。

したがって

$$a_n = \frac{1}{b_n} - 2 = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 3(-1)^n} - 2 = \frac{2^n - 6(-1)^n}{2^n + 3(-1)^n}$$

である。

3 別解・背景

-2 は元の漸化式に代入すると次の項も -2 になる値です。(1)では、この値に途中から到達できるかを逆向きに調べています。一方、 1 も一定の数列を作る値であり、変換後の b_n では $1/3$ に対応します。公比 $-1/2$ の等比数列を解いた結果、 b_n は $1/3$ に近づき、元の数列は 1 に近づきます。



2026 年度 北海道大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

関数 $f(x)$ を次によって定める。

$$f(x) = \int_0^x \left\{ \sin(x-t) - \frac{t}{4} \right\}^2 dt$$

次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^x t \sin(x-t) dt$ を x の式で表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ。

1

解説

積分では t を変数として計算し、 x は積分の上端にも被積分関数にも含まれています。まず $x-t$ というまとまりを u に置き換えると、三角関数の中が単純になります。 $u = x-t$ なら $t = x-u$ 、 $dt = -du$ です。 $t=0$ から $t=x$ へ進むと $u=x$ から $u=0$ へ進むため、負号と積分範囲の向きを合わせて処理します。

(1)の置換後の積分は

$$\int_0^x (x-u) \sin u \, du = x \int_0^x \sin u \, du - \int_0^x u \sin u \, du$$

です。第一項では x は積分変数ではないため外へ出せます。第二項は、 u を微分する側、 $\sin u$ を積分する側を選んで部分積分します。両者を加えると $x \cos x$ の項が消え、 $x - \sin x$ が残ります。

(2)では二乗を展開してから、三つの積分へ分けましょう。交差項の係数は $-t/2$ です。この項に(1)の結果を使うと、残るのは $\sin^2(x-t)$ と t^2 の積分です。前者は同じ置換の後、 $\sin^2 u = (1 - \cos 2u)/2$ で次数を下げれば計算できます。

(3)では、求めた式をそのまま x^3 で割ると、 $\sin x$ と $\sin 2x$ の二つの項がそれぞれ大きくなり、極限を別々に取れません。先に倍角の公式でまとめると

$$\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{\sin x}{2} (1 - \cos x)$$

です。 $\sin x$ と $1 - \cos x$ に分けることで、分母の x^3 を x と x^2 に分配できます。さらに $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ を使うと、すべて $\sin t/t$ の基本極限に帰着します。近似展開を使わず、両側からの極限まで同じ式で扱えます。

被積分関数の x は、 t による積分中は固定した値です。そのため $x-t$ を三角関数の角として持っていて、 x を t と同じ変数として微分しません。置換の際には上下端を同時に変え、 $dt = -du$ の負号で範囲を逆にして整理します。この操作は負の x でも定積分の向きの規則により成立します。

二乗の交差項は $2 \sin(x-t)(-t/4) = -t \sin(x-t)/2$ です。係数を $-1/4$ のままにすると、(2) で一次の x が相殺せず、(3) で極限を計算できなくなります。正しく展開すれば、正弦の二乗の積分から出る $x/2$ と、(1) の結果の $-x/2$ が消えます。

残った二つの正弦は、各項を x^3 で割って別々に極限を取ると有限な値になりません。和としては一次の項が相殺しているため、倍角の公式による因数分解でその相殺を式に表します。 $\sin x$ が x と同じ程度、 $1 - \cos x$ が x^2 と同じ程度となる形が得られます。

半角の式を使うと、 $(1-\cos x)/x^2$ の係数は $1/2$ です。 $x/2$ を基本極限の変数として分母にも同じ値を置くことが、この係数を落とさない要点です。平方のため左右どちらから近づいても同じ極限となり、最終値 $1/4+1/48=13/48$ が得られます。級数や繰り返し微分による極限公式を使わず、基本極限だけで完結できます。

2 答案

(1) $u = x - t$ とおくと、 $t = x - u$ である。 $t = 0$ のとき $u = x$ 、 $t = x$ のとき $u = 0$ であるから、

$$\int_0^x t \sin(x-t) dt = \int_x^0 (x-u) \sin u (-du) = \int_0^x (x-u) \sin u du$$

となる。

よって $\int_0^x (x-u) \sin u du = x \int_0^x \sin u du - \int_0^x u \sin u du$ である。ここで $\int_0^x \sin u du = 1 - \cos x$ であり、部分積分により

$$\int_0^x u \sin u du = [-u \cos u]_0^x + \int_0^x \cos u du = -x \cos x + \sin x$$

である。したがって $\int_0^x t \sin(x-t) dt = x(1 - \cos x) - (-x \cos x + \sin x) = x - \sin x$ である。

(2) 被積分関数を展開すると

$$\left\{ \sin(x-t) - \frac{t}{4} \right\}^2 = \sin^2(x-t) - \frac{t}{2} \sin(x-t) + \frac{t^2}{16}$$

である。したがって

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(x-t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x t \sin(x-t) dt + \frac{1}{16} \int_0^x t^2 dt$$

となる。

まず $u = x - t$ とおくと $\int_0^x \sin^2(x-t) dt = \int_0^x \sin^2 u du$ であり、 $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$ より $\int_0^x \sin^2 u du = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$ である。また (1) より $\int_0^x t \sin(x-t) dt = x - \sin x$ で、 $\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$ である。

以上を代入して $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{2}(x - \sin x) + \frac{x^3}{48}$ となる。よって $f(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x^3}{48}$ である。

(3) (2) の結果を用いる。 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ であるから、

$$\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{\sin x}{2} - \frac{2 \sin x \cos x}{4} = \frac{\sin x}{2} (1 - \cos x)$$

である。したがって

$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{1}{48}$$

となる。

また $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ より $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ である。ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

である。

3 別解・背景

三角関数の基本極限を使う前に、打ち消し合う項をまとめることがポイントです。 $\sin x/x$ は有限の極限を持ちますが、 $\sin x/x^3$ は同じようには扱えません。本問では、差を積 $\sin x(1 - \cos x)$ に変えることで、三次の小さい量であることが式から分かります。