

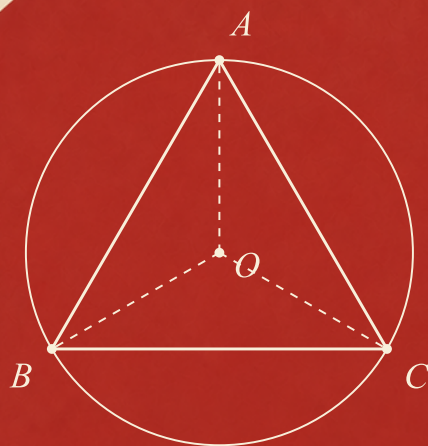
北海道大学

理系（後期）

数学

過去問10年

2016-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

北海道大学 理系数学

2016～2026 年度 後期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton



はじめに

本書は、北海道大学の後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2016～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

2020 年度は後期日程の個別学力検査が中止されたため、2016 年度を加えた実施 10 年度分を収録しています。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	9
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	18
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	26
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	34
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	42
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	50
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	58
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	66
2016 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	74
分野索引		82



2026 年度 北海道大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・後期日程〉

$x > 0$ とする。関数 $f(x)$ を $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$ とし、関数 $g(x)$ を $g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$ とする。次の問いに答えよ。

1. $f(x) \geq g(x)$ となる x の範囲を求めよ。

2. 定積分 $\int_1^4 |f(x) - g(x)| dx$ を求めよ。

1

解説

絶対値の付いた積分では、二つの関数の大小が変わる点を先に求める。 $x > 0$ なので、差に $2x^2$ を掛けても符号は変わらない。

指針 差を因数分解し、絶対値を外す区間を分ける

$2x^2\{f(x) - g(x)\}$ は 4 次式になる。 $x = 2$ が解であることを使って因数分解すると、差の符号は $(x - 2)^3$ だけで決まる。積分は $x = 2$ で分ける。

4 次式の係数を順に見ると、 x^2 の項がないため、符号を直接読み取るのは難しい。ところが $x = 2$ を代入すると 0 になり、 $(x - 2)$ で割った商にも $x = 2$ が根として残る。この操作を繰り返すと、 $-(x - 2)^3(x + 2)$ と因数分解できる。

$x + 2$ と分母 $2x^2$ は正なので、 $1 \leq x \leq 2$ では $f - g \geq 0$ 、 $2 \leq x \leq 4$ では $f - g \leq 0$ である。絶対値を外した後は、 $2x - x^2/2 + 8x^{-2} - 8x^{-1}$ を項別に積分すればよい。最後に $\log 4 = 2 \log 2$ を使うと、対数の項は消える。

この定積分は、二つのグラフと $x = 1$ 、 $x = 4$ で囲まれた部分の面積でもある。グラフは $x = 2$ で交わるため、符号を付けた積分をそのまま面積としないようにしたい。

(1) の差を通分すると、分子は $-x^4 + 4x^3 - 16x + 16$ です。 $x = 2$ が三重の根であることから $-(x - 2)^3(x + 2)$ となります。三乗は元の数と同じ符号を持つので、分子の負号により $x < 2$ で差が正、 $x > 2$ で差が負となります。重解であっても奇数回重なっているため、この交点では大小が入れ替わります。

もとの関数は $x = 0$ で定義されないで、求めた $x \leq 2$ に $x > 0$ を合わせます。答えを $0 \leq x \leq 2$ とすると、分母が 0 になる点を余分に含めます。 $x = 2$ は二つの関数が等しいので、こちらの端点は含められます。

(2) では絶対値の符号が変わる点が積分区間の内部にあります。 $[1, 2]$ では $|h| = h$ 、 $[2, 4]$ では $|h| = -h$ です。両方の面積を正の寄与として足すため、第二の積分には負号を付けます。 $\int_1^4 h$ だけでは二つの部分が相殺され、求める値になりません。

原始関数の $-8/x$ は、微分すると $8/x^2$ です。また $-8 \log x$ は $-8/x$ を与え、 $x > 0$ により自然対数の真数の条件も満たします。積分の端点を代入すると、前半は $H(2) - H(1)$ 、後半は $-H(4) + H(2)$ となります。中央の $H(2)$ が二度現れるのは、ここで符号を切り替えたためです。

対数項は $-16 \log 2$ と $8 \log 4$ であり、 $\log 4 = 2 \log 2$ から相殺します。残る有理数を通分すると $7/6$ です。答えが正になることに加え、二つの区間を別々に計算した値が非負であることも、絶対値の外し方の確認に使えます。

2 答案

(1) $x > 0$ において

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{-x^4 + 4x^3 - 16x + 16}{2x^2} \\ &= -\frac{(x-2)^3(x+2)}{2x^2}. \end{aligned}$$

$x+2 > 0$, $2x^2 > 0$ だから, $f(x) \geq g(x)$ は $x \leq 2$ と同値である。したがって, 求める範囲は

$$\underline{0 < x \leq 2}.$$

(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおき, その原始関数を

$$H(x) = x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{8}{x} - 8 \log x$$

とする。(1) の符号を使うと

$$\begin{aligned} \int_1^4 |h(x)| dx &= \int_1^2 h(x) dx - \int_2^4 h(x) dx \\ &= 2H(2) - H(1) - H(4). \end{aligned}$$

ここで

$$H(1) = -\frac{43}{6}, \quad H(2) = -\frac{4}{3} - 8 \log 2,$$

$$H(4) = \frac{10}{3} - 16 \log 2$$

だから, 求める値は

$$\underline{\underline{\frac{7}{6}}}.$$

3 別解・背景

微分で大小関係を調べる

 $h = f - g$ とおくと

$$h'(x) = 2 - x + \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3} = -\frac{(x-2)^2(x^2+2x+4)}{x^3}.$$

$x > 0$ では $h'(x) \leq 0$ であり, $x = 2$ 以外では $h'(x) < 0$ である。したがって h は単調に減少し, $h(2) = 0$ より, (1) と同じ大小関係を得る。

因数分解による主解は, 差の符号を直接判断できる。微分による方法は, 差のグラフが一度だけ 0 を横切ること確かめる見方である。 $h'(2) = 0$ でも, その前後で h の符号が変わることに注意したい。



2026 年度 北海道大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・後期日程〉

次の問いに答えよ。ただし、 $2^{10} = 1024$ を用いてよい。

1. $0.3 < \log_{10} 2$ が成り立つことを示せ。
2. $(1100)^2 < 2^{-3} \cdot 10^n$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。
3. $\log_{10} 2 < 0.305$ が成り立つことを示せ。

1 解説

対数の小数近似を使う問題ではない。 $2^{10} = 1024$ という整数の情報を、対数の不等式へ移して評価する。

指針 対数を取る前に整数の大きさを確定させる

(1) は $2^{10} > 10^3$ を使う。(2) は両辺に 2^3 を掛け、 10^n と比較する。(3) は $1024 < 1100$ と (2) の結果をつなぎ、 $2^{23} < 10^7$ を導く。

(2) で求める n は、そのまま (3) の評価に使える。 $2^{20} = 1024^2$ を 1100^2 で上から押さえれば、 $2^{20} < 2^{-3} 10^7$ となる。ここで 2^{-3} を左辺へ移すと、指数が 20 から 23 に増え、 $\log_{10} 2 < 7/23$ を得る。

最後の $7/23$ と 0.305 の比較も整数で行う。 $0.305 = 61/200$ だから、 $7 \cdot 200 < 61 \cdot 23$ を確認すればよい。途中で対数や分数を丸めると、厳密な不等式の証明にならない。

まず (1) では、 $\log_{10} 2$ を直接計算する必要はありません。底が $10 > 1$ の対数では、正の数の大小とその対数の大小が一致します。したがって $\log_{10} 2 > 3/10$ を示すには、指数を整数にして $10 \log_{10} 2 > 3$ 、すなわち $\log_{10}(2^{10}) > \log_{10}(10^3)$ を示せば十分です。問題で与えられた 2^{10} は、この比較にちょうど使えます。

(2) で両辺に掛ける 2^3 は正なので、不等号の向きは変わりません。計算は $1100^2 = 1\,210\,000$ 、その 8 倍が $9\,680\,000$ です。ここで 10^7 より小さいことだけでは、 $n = 7$ が最小だとは言えません。 10^6 より大きいことも確認し、 $n \leq 6$ なら $10^n \leq 10^6$ で不等式が成り立たないと説明します。 10^n が n とともに増加することが、この候補の絞り込みを支えています。

(3) は、欲しい上限 0.305 をそのまま指数にするより、前問の整数評価を利用します。 1024^2 を 1100^2 で上から押さえると、既に得た 10^7 との比較につながります。 $2^{20} < 2^{-3} 10^7$ の両辺に 2^3 を掛けることで、左辺の指数が 23 になるのです。この結果から得られる $7/23$ が目標の上限より小さければ、証明は完了します。

分数の大小を調べる時、分母 $23, 200$ はどちらも正です。従って交差して掛けた整数 $1400, 1403$ を比較できます。 $7/23$ を小数に丸める方法では、このわずかな差を保証できません。最後まで厳密な不等式を保つと、近似値に頼らず二つの上限をつなげられます。

2 答案

- (1) $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ である。常用対数は単調に増加するから

$$10 \log_{10} 2 > 3.$$

よって

$$\underline{0.3 < \log_{10} 2.}$$

- (2) 与えられた不等式は

$$2^3 \cdot 1100^2 < 10^n$$

と同値であり、左辺は 9680 000 である。

$$10^6 < 9680\,000 < 10^7$$

だから、 $n = 7$ は条件を満たし、 $n \leq 6$ は満たさない。
したがって、求める最小値は

$$\underline{n = 7.}$$

- (3) $1024 < 1100$ と (2) より

$$2^{20} = 1024^2 < 1100^2 < 2^{-3} 10^7.$$

よって $2^{23} < 10^7$ なので、常用対数を取ると

$$\log_{10} 2 < \frac{7}{23}.$$

$$7 \cdot 200 = 1400 < 1403 = 61 \cdot 23 \text{ から}$$

$$\frac{7}{23} < \frac{61}{200} = 0.305.$$

したがって

$$\underline{\log_{10} 2 < 0.305.}$$