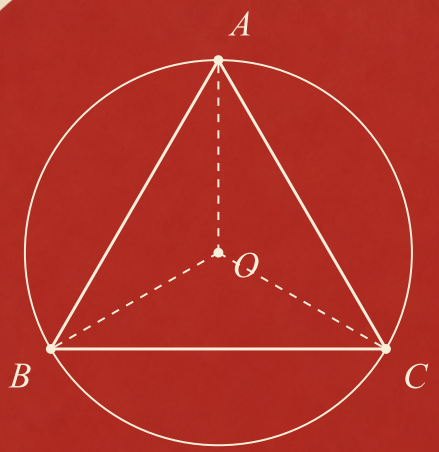
# 京都大学

## 文系

# 数学

## 過去問10年

2017-2026




## 解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

# 京都大学
# 文系数学

2017〜2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

## はじめに

本書は、京都大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

## 本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

## 収録年度・問題


| 年度 | 問題 | ページ |
|---|---|---|
| 2026 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 1 |
| 2025 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 11 |
| 2024 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 21 |
| 2023 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 31 |
| 2022 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 41 |
| 2021 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 50 |
| 2020 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 59 |
| 2019 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 69 |
| 2018 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 79 |
| 2017 年度 | 第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問 | 88 |

分野索引 …… 98

# 2026 年度 京都大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

$t$ は $0<t<1$ を満たす実数とする．座標平面において，円 $C:x^2+y^2=1$ 上で，$y$ 座標が $t$ であり，さらに第 1 象限にある点 P をとる．点 P における $C$ の接線を $l$ とし，放物線 $y=2-x^2$ と接線 $l$ で囲まれる図形の面積を $S$ とする．$t$ が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S$ の最小値を求めよ．

## 解説

円上の点は $P(\sqrt{1-t^2},t)$ ですが、根号を含む $x$ 座標を微分して面積を最小化する必要はありません。まず接線の式を立て、放物線との上下の差を二次式にします。最高次の係数が $-1$ なので、二交点の間では放物線が上です。判別式 $D=7t^2-4t+1$ は平方完成すると常に正であり、すべての $0<t<1$ で囲まれた有限の領域が存在します。

$s=\sqrt{1-t^2}$ と置けば、円の接線は $sx+ty=1$ です。$t>0$ なので $y=(1-sx)/t$ へ直せます。放物線から接線を引くと $-x^2+(s/t)x+2-1/t$ で、交点の方程式はこれに $-t$ を掛けた $tx^2-sx+1-2t=0$ です。判別式では $s^2$ へ $1-t^2$ を代入して $7t^2-4t+1$ となります。平方完成 $7(t-2/7)^2+3/7$ によって、根が重なる場合もないと分かります。

二交点を $\alpha<\beta$ とすると、上下の差は $(x-\alpha)(\beta-x)$ です。この形を積分すると面積は $(\beta-\alpha)^3/6$ になり、交点の座標を個別に求める計算を省けます。ただし根の間隔は $\sqrt{D}/t$ であり、判別式だけを面積へ代入すると分母 $t^3$ を落としてしまいます。交点の方程式の二次の係数が $t>0$ であることを確認して、根の差を使います。

面積公式の理由は、$d=\beta-\alpha$ と置き、$u=x-\alpha$ へ移すと明確です。積分区間は $0\leqq u\leqq d$ となり、

$$\int_0^d u(d-u)\,du=\frac{d^3}{2}-\frac{d^3}{3}=\frac{d^3}{6}$$

です。二次式の頂点の位置が変わっても面積は幅 $d$ だけで決まります。一方、根の差は解の公式の二つの分子を引いて $\{(s+\sqrt{D})-(s-\sqrt{D})\}/(2t)=\sqrt{D}/t$ です。積分する二次式と、根を求めるために $t$ を掛けた式を区別すれば、係数の取り違えを防げます。

面積は $\{7-4/t+1/t^2\}^{3/2}/6$ です。中身は正で、正の数の $3/2$ 乗は増加するため、中身だけを最小にすれば十分です。微分の分子 $4t-2$ の符号を調べれば、$t=1/2$ の前で減少し、その後で増加することが分かります。開区間の端点を候補にする必要はなく、この内点が全体の最小点です。

平方完成によっても $7-4/t+1/t^2=(1/t-2)^2+3$ と直ちに分かります。等号は $t=1/2$ で実際に達成でき、第一象限という点 $P$ の条件も満たします。微分と同じ最小値 $\sqrt{3}/2$ が得られます。

$t=1/2$ では $s=\sqrt{3}/2>0$ で、元の点 $P$ も確かに第 1 象限にあります。また判別式は $3/4$、根の幅は $\sqrt{3}$ となり、面積公式からも $S=3\sqrt{3}/6$ です。平方完成の下界は全ての許容される $t$ に通用し、等号を満たす $t$ が範囲内にあるので、端へ近づいたときの下限にとどまらず実際の最小値です。

## 2 答案

点 $P$ は第 1 象限にあり，$y$ 座標が $t$ であるから，$P=(s,t),\quad s=\sqrt{1-t^2}$ とおける。円 $x^2+y^2=1$ の点 $(s,t)$ における接線は $sx+ty=1$ である。したがって接線 $l$ は $y=\frac{1-sx}{t}$ と表される。

放物線 $y=2-x^2$ と直線 $l$ の差をとると

$$2-x^2-\frac{1-sx}{t}=\frac{-tx^2+sx+2t-1}{t}=-\frac{1}{t}\{tx^2-sx+1-2t\}$$

である。交点の $x$ 座標は，2 次方程式 $tx^2-sx+1-2t=0$ の 2 つの解である。この判別式を $D$ とすると $D=s^2-4t(1-2t)=(1-t^2)-4t+8t^2=7t^2-4t+1$ である。なお $7t^2-4t+1=7\left(t-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7}>0$ なので，2 つの交点は常に存在する。

2 つの解を $\alpha<\beta$ とすると，根の間隔は $\beta-\alpha=\frac{\sqrt{D}}{t}$ である。また上下差は，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $2-x^2-\frac{1-sx}{t}=(x-\alpha)(\beta-x)$ と書ける。したがって面積 $S$ は

$$S=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(\beta-x)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{D^{3/2}}{6t^3}$$

である。よって

$$S=\frac{(7t^2-4t+1)^{3/2}}{6t^3}=\frac{1}{6}\left(7-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^{3/2}$$

である。

したがって，$0<t<1$ において $F(t)=7-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}$ を最小にすればよい。微分すると $F'(t)=\frac{4}{t^2}-\frac{2}{t^3}=\frac{4t-2}{t^3}$ である。$0<t<1$ では分母が正なので，$F'(t)<0$ となるのは $0<t<1/2$，$F'(t)>0$ となるのは $1/2<t<1$ である。よって $F(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ で最小となる。

このとき $F\left(\frac{1}{2}\right)=7-8+4=3$ であるから，求める面積の最小値は $S_{\min}=\frac{1}{6}\cdot3^{3/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

## 3 別解・背景

面積の式から

$$S=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+3\right\}^{3/2}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

等号は $t=1/2$ で成り立ち、この値は $0<t<1$ に含まれる。

## 2026 年度 京都大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

$r$ は正の実数とする．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA 上に点 P をとる．点 P が辺 OA 上のどこにあっても，点 P を中心とする半径 $r$ の球面が，辺 BC と共有点をもたないような $r$ の範囲を求めよ．ただし，点 O，A は辺 OA に含まれ，点 B，C は辺 BC に含まれるとする．

### 1 解説

球面と球の内部を区別します。半径が十分大きいと辺 $BC$ 全体が球の内部に入りますが、球面との共有点はなくなります。そのため答えは小さい半径だけの範囲になるとは限りません。中心 $P$ と辺上の点 $Q$ をともに動かし、距離 $PQ$ が取りうる値の全体を求め、その外側を選びます。

対辺の中点 $M, N$ を使うと、$OA, BC, MN$ の三方向が互いに垂直になります。これは正三角形の中線の垂直性と、$ON = AN$ である二等辺三角形の中線から分かります。$ON = \sqrt{3}/2$, $OM = 1/2$ なので、三平方の定理によって $MN^2 = 1/2$ です。

$OB = OC$ より $ON$ は $BC$ へ垂直で、$AB = AC$ より $AN$ も同様です。この二方向を含む平面 $OAN$ の中の $OA, MN$ は、どちらも $BC$ へ垂直です。また $ON = AN$ なので、三角形 $OAN$ の頂点 $N$ から底辺の中点 $M$ へ引く線も垂直です。これで三方向の直交性を図の見かけによらず確認できます。特に $MN$ は対辺間の距離であり、二つの正三角形の高さ $\sqrt{3}/2$ そのものではありません。

各辺の長さが 1 なので、点の位置を中点からの符号つきの係数 $u, v$ で表せば、どちらも $-1/2$ から $1/2$ まで動きます。負の値を取りうる係数を、そのまま距離 $MP, NQ$ と呼ばないようにします。三方向の直交性から $PQ^2 = u^2+v^2+1/2$ となり、最小値 $1/2$ と最大値 1 が分かります。

位置の分解は

$$\overrightarrow{PQ} = -u\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MN} + v\overrightarrow{BC}$$

です。これを自分自身と内積を取ると、異なる方向の積は全て 0 となり、三つの長さの二乗だけが残ります。$u = v = 0$ が最短の中点同士に対応し、$|u| = |v| = 1/2$ が最長の端点同士に対応します。端点を含むという問題の指定は、この最大値と最小値が本当に取られることに使います。

ただし最大・最小だけでは、途中の値が欠けないことをまだ示していません。$u^2+v^2 = w$ となる $u, v$ を、$0 \leqq w \leqq 1/4$ と $1/4 \leqq w \leqq 1/2$ で具体的に選び、全区間が実現することを確認します。したがって $1/\sqrt{2} \leqq r \leqq 1$ ならどこかの中心で共有点が生じ、その区間の外ではどの中心でも生じません。両端は中点どうし、または端点どうしで実際に達成するので、答えの境界から除きます。

途中の距離 $r$ を実現するには $w = r^2 - 1/2$ と置きます。$w \leqq 1/4$ なら $(u, v) = (\sqrt{w}, 0)$、$w \geqq 1/4$ なら $(1/2, \sqrt{w - 1/4})$ です。両方で各係数は辺の許容範囲に入ります。「どの $P$ でも共有点がない」を否定するには、一組の $P, Q$ で $PQ = r$ となれば十分なので、この構成で閉区間全体を排除できます。反対に $r > 1$ なら全ての距離が $r$ 未満となり、辺が球の内部にあっても球面には届きません。

## 2 答案

辺 $OA$ の中点を $M$，辺 $BC$ の中点を $N$ とする。$OB=OC$, $AB=AC$ より $ON, AN$ はともに $BC$ に垂直であり、$OM=AM$ と $ON=AN$ から $MN$ は $OA$ に垂直である。このため、対辺 $OA$ と $BC$ は垂直であり，また $MN$ は両方の辺に垂直である。正四面体の 1 辺の長さは 1 なので，三角形 $OBC$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。したがって，頂点 $O$ から辺 $BC$ の中点 $N$ までの距離は $ON=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

また $OM=1/2$ であり，$MN\perp OA$ だから $MN^2=ON^2-OM^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ である。よって $MN=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

辺 $OA$ 上の点 $P$ と辺 $BC$ 上の点 $Q$ の位置を $\overrightarrow{MP}=u\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{NQ}=v\overrightarrow{BC}$ と表す。辺の長さは 1 で、$M, N$ は各辺の中点なので、$-\frac{1}{2}\leqq u, v\leqq\frac{1}{2}$ である。したがって $MP^2=u^2$, $NQ^2=v^2$ となる。$OA, BC, MN$ は互いに直交する方向にあるので，$PQ^2=MP^2+MN^2+NQ^2=u^2+\frac{1}{2}+v^2$ である。

したがって，$P$ と $Q$ がそれぞれ辺 $OA$，辺 $BC$ 上を動くとき，距離 $PQ$ の 2 乗は $u^2+v^2+\frac{1}{2}$ の形で表される。ただし $u^2\leqq 1/4$，$v^2\leqq 1/4$ であるから，その最小値は $\frac{1}{2}$ であり，最大値は $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ である。さらに $w=u^2+v^2$ は $0\leqq w\leqq 1/2$ のすべての値をとる。実際，$0\leqq w\leqq 1/4$ では $u=\sqrt{w}$, $v=0$，$1/4\leqq w\leqq 1/2$ では $u=1/2$, $v=\sqrt{w-1/4}$ と選べばよい。したがって，距離 $PQ$ の取りうる値は $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq PQ\leqq 1$ のすべてである。

点 $P$ を中心とする半径 $r$ の球面が辺 $BC$ と共有点をもつのは，ある $Q\in BC$ について $PQ=r$ となるときである。したがって，どこかの $P\in OA$ で共有点が生じる半径は $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq r\leqq 1$ である。

問題では，点 $P$ が辺 $OA$ 上のどこにあっても共有点をもたないことを要求している。よって求める $r$ の範囲は，この区間の外側であり，$r>0$ に注意して $0<r<\frac{1}{\sqrt{2}}$,　　$1<r$ である。

## 3 2026 年度 京都大学・文系 第 3 問

【数学（文系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

$p$ は 3 より大きい素数とする．

**(1)** $2p$ 以上の整数 $N$ は，0 以上の整数 $m$ と 0 以上の整数 $k$ を用いて

$$N = 3m + pk$$

と表すことができることを示せ．

**(2)** 0 以上の整数 $m$ と 0 以上の整数 $k$ を用いて

$$N = 3m + pk$$

と表すことができないような 0 以上の整数 $N$ の個数を求めよ．

### 1 解説

$m, k$ は負にできないので、3 と $p$ で割った余りを合わせるだけでは不十分です。(1) では $p$ が 3 で割り切れないことから、$0, p, 2p$ の余りが三種類を尽くすと分かります。$k$ を 0,1,2 のいずれかに選べば $N-pk$ は 3 の倍数となり、さらに $N \geqq 2p$ によって $N - pk \geqq 0$ が保証されます。ここで初めて $m = (N - pk)/3$ が 0 以上の整数となります。

余りが 1 の場合には $0, p, 2p$ の余りは順に 0,1,2、余りが 2 の場合には 0,2,1 です。従って選ぶ $k$ は $N$ の余りごとに一つ定まります。例えば $p = 5, N = 12$ なら $k = 0, m = 4$、$N = 13$ なら $k = 2, m = 1$ です。余りだけを合わせると $N < 2p$ で負の $m$ が生じることがありますが、(1) の範囲では最大の引き算 $N-2p$ も 0 以上です。この下限が、整数で表すことと非負整数で表すことをつないでいます。

(2) は表せない数を直接列挙するより、範囲を $0 \leqq N < 2p$ へ限定して、表せる数を数えます。(1) によりこの範囲外には表せない数がありません。また $k \geqq 2$ なら $pk \geqq 2p$ なので、範囲内では $k = 0, 1$ だけです。前者は 3 の倍数、後者は $p$ へ 3 の倍数を足した数であり、余りが異なるため二種類に重複はありません。

$p$ を 3 で割った余りに応じ、$p = 3q+1$ と $p = 3q+2$ を分けます。上限は $2p$ 未満なので、最後に入る 3 の倍数が前者では $6q$、後者では $6q+3$ となり、個数が一つ変わります。一方 $p+3m < 2p$ は $3m < p$ であり、どちらの場合も $m = 0, \ldots, q$ の $q+1$ 個です。0 を表せる数へ含めることと、上端 $2p$ を含めないことが個数の計算で重要です。

二場合の数え上げを式で並べると、$p = 3q + 1$ では 3 の倍数が $2q + 1$ 個、$p + 3m$ が $q + 1$ 個です。$p = 3q + 2$ では前者だけが $2q + 2$ 個へ増えます。二つの和はそれぞれ $3q + 2, 3q + 3$ となって、共に $p + 1$ です。$p + 3m$ の列は最初の $p$ を $m = 0$ として含むため、最後の添字 $q$ と個数 $q + 1$ を取り違えないようにします。これらは表現の組 $(m, k)$ でなく、表される整数 $N$ の個数を数えています。

各場合で表せる数が $p + 1$ 個とそろうため、全 $2p$ 個から引いて $p - 1$ 個を得ます。素数である条件の役割は、$p > 3$ と合わせて 3 の倍数を排除することです。それ以外の特殊な素数の性質や、二数の非負結合に関する一般定理は使わずに結論できます。

具体的に $p = 5$ なら $0 \leqq N < 10$ の表せる整数は $0, 3, 5, 6, 8, 9$ で、残りは $1, 2, 4, 7$ の四個です。$k = 0$ と 1 の列が異なる余りをもつため、同じ数を二回数えていません。区間内で $k \geqq 2$ を除いた根拠も合わせれば、数えた六個以外に別の表現から増える数はないと分かります。全個数からの差を取る前に、列の網羅性と重複のなさを確かめるのが要点です。

## 2 答案

**(1)** $p$ は 3 より大きい素数であるから，3 で割り切れない。したがって，$p$ を 3 で割った余りは 1 または 2 である。よって $0,\quad p,\quad 2p$ を 3 で割った余りは，$0, 1, 2$ の 3 種類すべてになる。

したがって，任意の整数 $N$ に対して，$k = 0, 1, 2$ のいずれかを選べば $N - pk$ が 3 で割り切れる。いま $N \geqq 2p$ であり，$k \leqq 2$ だから $N - pk \geqq N - 2p \geqq 0$ である。そこで $m = \frac{N-pk}{3}$ とおけば，$m$ は 0 以上の整数であり，$N = 3m + pk$ と表せる。よって (1) が示された。

**(2)** (1) より，$2p$ 以上の整数はすべて表せる。したがって，表せない可能性があるのは $0 \leqq N < 2p$ の範囲だけである。この範囲で表せる数を数える。$k = 0$ のとき，表せる数は 3 の倍数である。$k = 1$ のとき，表せる数は $p,\quad p+3,\quad p+6,\quad \ldots$ で，$2p$ 未満のものに限られる。$k \geqq 2$ のときは $pk \geqq 2p$ となるので，$0 \leqq N < 2p$ の範囲には現れない。

まず $p = 3q+1$ の場合を考える。$0 \leqq N < 2p = 6q+2$ にある 3 の倍数は $0, 3, 6, \ldots, 6q$ であり，個数は $2q+1$ である。また $p+3m < 2p$ は $3m < p = 3q+1$ と同値なので，$m = 0, 1, \ldots, q$ が可能であり，個数は $q+1$ である。両者は 3 で割った余りが異なるので重複しない。よって表せる数は $(2q+1)+(q+1) = 3q+2 = p+1$ 個である。

次に $p = 3q+2$ の場合を考える。$0 \leqq N < 2p = 6q+4$ にある 3 の倍数は $0, 3, 6, \ldots, 6q+3$ であり，個数は $2q+2$ である。また $p+3m < 2p$ は $3m < p = 3q+2$ と同値なので，$m = 0, 1, \ldots, q$ が可能であり，個数は $q+1$ である。したがって表せる数は $(2q+2)+(q+1) = 3q+3 = p+1$ 個である。

いずれの場合も，$0 \leqq N < 2p$ にある $2p$ 個の整数のうち，表せるものは $p+1$ 個である。したがって表せないものの個数は $2p-(p+1) = p-1$ である。

## 2026 年度 京都大学・文系 第 4 問

【数学（文系）第 4 問】〈2026 年度・前期日程〉

実数 $x$ に対して，$l \leqq x$ を満たす最大の整数 $l$ を $[x]$ で表す．正の整数 $n$ に対して，$a_n = \sum_{k=1}^{n} [\log_3 k]$ と定める．

(1) $a_{26}$ を求めよ．

(2) $N$ を正の整数とし，$m = 3^N - 1$ とするとき，$a_m$ を $N$ を用いて表せ．

### 解説

問題で定義された $[x]$ は整数部分を表します。対数の近似値を一個ずつ計算するのでなく、値が同じになる $k$ の範囲をまとめます。底 3 の対数は増加するため、$[\log_3 k] = j$ は $3^j \leqq k < 3^{j+1}$ と同値です。右端の 3 のべきでは値が一つ上がるので、半開区間の向きを正しく扱います。

整数部分の定義は $j \leqq \log_3 k < j+1$ です。底 3 が 1 より大きいので、この両辺を 3 の指数に移しても向きは変わりません。$k$ が整数であることから、右端は $k \leqq 3^{j+1}-1$ へ直せます。対数の増加性による変換と、整数の端点を一つ手前にする操作を分けて考えます。最初の群では $3^0 = 1$ なので、$k = 1$ も値 0 として含まれます。

(1) では $26 = 3^3 - 1$ なので、値 0 の二個、値 1 の六個、値 2 の十八個をすべて含みます。整数の範囲を両端を含む形で書くと、$1, \ldots, 2$、$3, \ldots, 8$、$9, \ldots, 26$ で、重複も抜けもありません。個数へ各値を掛けた和が 42 です。

(2) で $m = 3^N - 1$ と指定されているため、途中で切れる区間はありません。$j = 0, \ldots, N-1$ の各範囲が完全に入り、長さは $3^{j+1} - 3^j = 2 \cdot 3^j$ です。したがって求める和は $2\sum j3^j$ となります。

各群の寄与は「同じ値 $j$」と「個数 $2 \cdot 3^j$」の積です。群の個数だけを加えると元の項数 $m$ になりますが、$a_m$ には値 $j$ の重みを付ける必要があります。最大の群は $3^{N-1}$ から $3^N - 1$ までであり、その対数の整数部分は $N$ でなく $N-1$ です。$m$ の形を先に見て全群が完全に含まれると判断すれば、最後の群の個数を別に補正せずに済みます。

この和は項に $j$ が掛かっているため、等比数列の和をそのまま代入できません。$T = \sum j3^j$ とおいて 3 倍し、添字を一つずらして引くと、中間の係数が 1 となり、残りが普通の等比数列へ帰着します。最後の $(N-1)3^N$ の項と、元の $j = 0$ の項が 0 であることを確認して引きます。$N = 1$ では元の和が 0 で、求めた式も 0 です。また $N = 3$ を代入すると (1) の 42 になり、上限と係数の整合性を確認できます。

ずらした和を具体的に書くと $T = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + (N-1)3^{N-1}$、$3T = 1 \cdot 3^2 + \cdots + (N-1)3^N$ です。$3T - T$ の中間項では係数が $(j-1) - j = -1$ となるので、

$$2T = (N-1)3^N - \frac{3^N - 3}{2}.$$

これを通分すれば $2T = \{(2N-3)3^N + 3\}/2$ です。求める $a_m$ は既に $2T$ なので、もう一度 2 で割る必要はありません。$N = 2$ なら 0 の群と 1 の群だけで $a_8 = 6$ となり、式も 6 を与えます。

## 2 答案

**(1)** $[\log_3 k]$ は，$3^j \leqq k < 3^{j+1}$ のとき $j$ である。$1 \leqq k \leqq 26$ では，$1 \leqq k \leqq 2$ のとき $[\log_3 k] = 0$，$3 \leqq k \leqq 8$ のとき $[\log_3 k] = 1$，$9 \leqq k \leqq 26$ のとき $[\log_3 k] = 2$ である。

それぞれの個数は $2, 6, 18$ 個であるから，$a_{26} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 = 42$ である。したがって $a_{26} = 42$ である。

**(2)** $m = 3^N - 1$ とする。$j = 0, 1, \ldots, N-1$ について，$3^j \leqq k \leqq 3^{j+1} - 1$ のとき $[\log_3 k] = j$ である。この範囲の整数 $k$ の個数は $(3^{j+1} - 1) - 3^j + 1 = 3^{j+1} - 3^j = 2 \cdot 3^j$ である。$m = 3^N - 1$ なので，$j = N-1$ までの範囲がちょうどすべて含まれる。

したがって $a_m = \sum_{j=0}^{N-1} 2j3^j$ である。ここで $T = \sum_{j=0}^{N-1} j3^j$ とおく。すると $3T = \sum_{j=0}^{N-1} j3^{j+1} = \sum_{j=1}^{N} (j-1)3^j$ であるから，$3T - T = (N-1)3^N - \sum_{j=1}^{N-1} 3^j$ である。右辺の和は $\sum_{j=1}^{N-1} 3^j = \frac{3^N - 3}{2}$ なので，$2T = (N-1)3^N - \frac{3^N - 3}{2} = \frac{(2N-3)3^N + 3}{2}$ である。したがって $T = \frac{3 + (2N-3)3^N}{4}$ である。

ゆえに $a_m = 2T = \frac{3 + (2N-3)3^N}{2}$ である。