

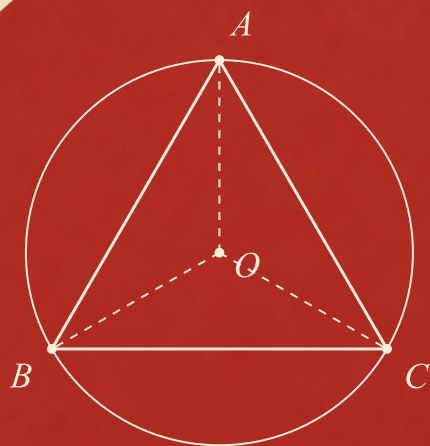
京都大学

文系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

京都大学

文系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton



はじめに

本書は、京都大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	21
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	31
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	41
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	50
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	59
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	69
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	79
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	88
分野索引		98



2026 年度 京都大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする．座標平面において，円 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上で， y 座標が t であり，さらに第 1 象限にある点 P をとる．点 P における C の接線を l とし，放物線 $y = 2 - x^2$ と接線 l で囲まれる図形の面積を S とする． t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき， S の最小値を求めよ．

1

解説

円上の点は $P(\sqrt{1-t^2}, t)$ ですが，根号を含む x 座標を微分して面積を最小化する必要はありません．まず接線の式を立て，放物線との上下の差を二次式にします．最高次の係数が -1 なので，二交点の間では放物線が上です．判別式 $D = 7t^2 - 4t + 1$ は平方完成すると常に正であり，すべての $0 < t < 1$ で囲まれた有限の領域が存在します．

$s = \sqrt{1-t^2}$ と置けば，円の接線は $sx + ty = 1$ です． $t > 0$ なので $y = (1-sx)/t$ へ直せます．放物線から接線を引くと $-x^2 + (s/t)x + 2 - 1/t$ で，交点の方程式はこれに $-t$ を掛けた $tx^2 - sx + 1 - 2t = 0$ です．判別式では $s^2 \geq 1-t^2$ を代入して $7t^2 - 4t + 1$ となります．平方完成 $7(t-2/7)^2 + 3/7$ によって，根が重なる場合もないと分かります．

二交点を $\alpha < \beta$ とすると，上下の差は $(x-\alpha)(\beta-x)$ です．この形を積分すると面積は $(\beta-\alpha)^3/6$ になり，交点の座標を個別に求める計算を省けます．ただし根の間隔は $\sqrt{D}/t$ であり，判別式だけを面積へ代入すると分母 t^3 を落としてしまいます．交点の方程式の二次の係数が $t > 0$ であることを確認して，根の差を使います．

面積公式の理由は， $d = \beta - \alpha$ と置き， $u = x - \alpha$ へ移すと明確です．積分区間は $0 \leq u \leq d$ となり，

$$\int_0^d u(d-u) du = \frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{3} = \frac{d^3}{6}$$

です．二次式の頂点の位置が変わっても面積は幅 d だけで決まります．一方，根の差は解の公式の二つの分子を引いて $\{(s+\sqrt{D}) - (s-\sqrt{D})\}/(2t) = \sqrt{D}/t$ です．積分する二次式と，根を求めるために t を掛けた式を区別すれば，係数の取り違えを防げます．

面積は $\{7 - 4/t + 1/t^2\}^{3/2}/6$ です．中身は正で，正の数の $3/2$ 乗は増加するため，中身だけを最小にすれば十分です．微分の分子 $4t-2$ の符号を調べれば， $t = 1/2$ の前で減少し，その後で増加することが分かります．开区間の端点を候補にする必要はなく，この内点が全体の最小点です．

平方完成によっても $7 - 4/t + 1/t^2 = (1/t - 2)^2 + 3$ と直ちに分かります．等号は $t = 1/2$ で実際に達成でき，第一象限という点 P の条件も満たします．微分と同じ最小値 $\sqrt{3}/2$ が得られます．

$t = 1/2$ では $s = \sqrt{3}/2 > 0$ で，元の点 P も確かに第 1 象限にあります．また判別式は $3/4$ ，根の幅は $\sqrt{3}$ となり，面積公式からも $S = 3\sqrt{3}/6$ です．平方完成の下界は全ての許容される t に通用し，等号を満たす t が範囲内にあるので，端へ近づいたときの下限にとどまらず実際の最小値です．

2 答案

点 P は第 1 象限にあり、 y 座標が t であるから、 $P = (s, t)$, $s = \sqrt{1-t^2}$ とおける。円 $x^2 + y^2 = 1$ の点 (s, t) における接線は $sx + ty = 1$ である。したがって接線 l は $y = \frac{1-sx}{t}$ と表される。

放物線 $y = 2 - x^2$ と直線 l の差をとると

$$2 - x^2 - \frac{1-sx}{t} = \frac{-tx^2 + sx + 2t - 1}{t} = -\frac{1}{t}\{tx^2 - sx + 1 - 2t\}$$

である。交点の x 座標は、2 次方程式 $tx^2 - sx + 1 - 2t = 0$ の 2 つの解である。この判別式を D とすると $D = s^2 - 4t(1-2t) = (1-t^2) - 4t + 8t^2 = 7t^2 - 4t + 1$ である。なお $7t^2 - 4t + 1 = 7\left(t - \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0$ なので、2 つの交点は常に存在する。

2 つの解を $\alpha < \beta$ とすると、根の間隔は $\beta - \alpha = \frac{\sqrt{D}}{t}$ である。また上下差は、 $\alpha \leq x \leq \beta$ で $2 - x^2 - \frac{1-sx}{t} = (x - \alpha)(\beta - x)$ と書ける。したがって面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) dx = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = \frac{D^{3/2}}{6t^3}$$

である。よって

$$S = \frac{(7t^2 - 4t + 1)^{3/2}}{6t^3} = \frac{1}{6} \left(7 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right)^{3/2}$$

である。

したがって、 $0 < t < 1$ において $F(t) = 7 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}$ を最小にすればよい。微分すると $F'(t) = \frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^3} = \frac{4t-2}{t^3}$ である。 $0 < t < 1$ では分母が正なので、 $F'(t) < 0$ となるのは $0 < t < 1/2$ 、 $F'(t) > 0$ となるのは $1/2 < t < 1$ である。よって $F(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最小となる。

このとき $F(\frac{1}{2}) = 7 - 8 + 4 = 3$ であるから、求める面積の最小値は $S_{\min} = \frac{1}{6} \cdot 3^{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

3 別解・背景

面積の式から

$$S = \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{1}{t} - 2 \right)^2 + 3 \right\}^{3/2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

等号は $t = 1/2$ で成り立ち、この値は $0 < t < 1$ に含まれる。



2026 年度 京都大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

r は正の実数とする. 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において, 辺 OA 上に点 P をとる. 点 P が辺 OA 上のどこにあっても, 点 P を中心とする半径 r の球面が, 辺 BC と共有点をもたないような r の範囲を求めよ. ただし, 点 O, A は辺 OA に含まれ, 点 B, C は辺 BC に含まれるとする.

1

解説

球面と球の内部を区別します. 半径が十分大きいと辺 BC 全体が球の内部に入りますが, 球面との共有点はありません. そのため答えは小さい半径だけの範囲になるとは限りません. 中心 P と辺上の点 Q をともに動かし, 距離 PQ が取りうる値の全体を求め, その外側を選びます.

対辺の中点 M, N を使うと, OA, BC, MN の三方向が互いに垂直になります. これは正三角形の中線の垂直性と, $ON = AN$ である二等辺三角形の中線から分かります. $ON = \sqrt{3}/2, OM = 1/2$ なので, 三平方の定理によって $MN^2 = 1/2$ です.

$OB = OC$ より ON は BC へ垂直で, $AB = AC$ より AN も同様です. この二方向を含む平面 OAN の中の OA, MN は, どちらも BC へ垂直です. また $ON = AN$ なので, 三角形 OAN の頂点 N から底辺の中点 M へ引く線も垂直です. これで三方向の直交性を図の見かけによらず確認できます. 特に MN は対辺間の距離であり, 二つの正三角形の高さ $\sqrt{3}/2$ そのものではありません.

各辺の長さが 1 なので, 点の位置を中点からの符号付きの係数 u, v で表せば, どちらも $-1/2$ から $1/2$ ままで動きます. 負の値を取りうる係数を, そのまま距離 MP, NQ と呼ばないようにします. 三方向の直交性から $PQ^2 = u^2 + v^2 + 1/2$ となり, 最小値 $1/2$ と最大値 1 が分かります.

位置の分解は

$$\overrightarrow{PQ} = -u\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MN} + v\overrightarrow{BC}$$

です. これを自分自身と内積を取ると, 異なる方向の積は全て 0 となり, 三つの長さの二乗だけが残ります. $u = v = 0$ が最短の中点同士に対応し, $|u| = |v| = 1/2$ が最長の端点同士に対応します. 端点を含むという問題の指定は, この最大値と最小値が本当に取られることに使います.

ただし最大・最小だけでは, 途中の値が欠けないことをまだ示していません. $u^2 + v^2 = w$ となる u, v を, $0 \leq w \leq 1/4$ と $1/4 \leq w \leq 1/2$ で具体的に選び, 全区間が実現することを確認します. したがって $1/\sqrt{2} \leq r \leq 1$ ならどこかの中心で共有点が生じ, その区間の外ではどの中心でも生じません. 両端は中点どうし, または端点どうしで実際に達成するので, 答えの境界から除きます.

途中の距離 r を実現するには $w = r^2 - 1/2$ と置きます. $w \leq 1/4$ なら $(u, v) = (\sqrt{w}, 0)$, $w \geq 1/4$ なら $(1/2, \sqrt{w - 1/4})$ です. 両方で各係数は辺の許容範囲に入ります. 「どの P でも共有点がない」を否定するには, 一組の P, Q で $PQ = r$ となれば十分なので, この構成で閉区間全体を排除できます. 反対に $r > 1$ なら全ての距離が r 未満となり, 辺が球の内部にあっても球面には届きません.

2 答案

辺 OA の中点を M , 辺 BC の中点を N とする。 $OB = OC$, $AB = AC$ より ON, AN はともに BC に垂直であり、 $OM = AM$ と $ON = AN$ から MN は OA に垂直である。このため、対辺 OA と BC は垂直であり、また MN は両方の辺に垂直である。正四面体の 1 辺の長さは 1 なので、三角形 OBC は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。したがって、頂点 O から辺 BC の中点 N までの距離は $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

また $OM = 1/2$ であり、 $MN \perp OA$ だから $MN^2 = ON^2 - OM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である。よって $MN = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

辺 OA 上の点 P と辺 BC 上の点 Q の位置を $\overrightarrow{MP} = u\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{NQ} = v\overrightarrow{BC}$ と表す。辺の長さは 1 で、 M, N は各辺の中点なので、 $-\frac{1}{2} \leq u, v \leq \frac{1}{2}$ である。したがって $MP^2 = u^2$, $NQ^2 = v^2$ となる。 OA, BC, MN は互いに直交する方向にあるので、 $PQ^2 = MP^2 + MN^2 + NQ^2 = u^2 + \frac{1}{2} + v^2$ である。

したがって、 P と Q がそれぞれ辺 OA , 辺 BC 上を動くとき、距離 PQ の 2 乗は $u^2 + v^2 + \frac{1}{2}$ の形で表される。ただし $u^2 \leq 1/4$, $v^2 \leq 1/4$ であるから、その最小値は $\frac{1}{2}$ であり、最大値は $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ である。さらに $w = u^2 + v^2$ は $0 \leq w \leq 1/2$ のすべての値をとる。実際、 $0 \leq w \leq 1/4$ では $u = \sqrt{w}$, $v = 0$, $1/4 \leq w \leq 1/2$ では $u = 1/2$, $v = \sqrt{w - 1/4}$ と選べばよい。したがって、距離 PQ の取りうる値は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq PQ \leq 1$ のすべてである。

点 P を中心とする半径 r の球面が辺 BC と共有点をもつのは、ある $Q \in BC$ について $PQ = r$ となるときである。したがって、どこかの $P \in OA$ で共有点が生じる半径は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1$ である。

問題では、点 P が辺 OA 上のどこにあっても共有点をもたないことを要求している。よって求める r の範囲は、この区間の外側であり、 $r > 0$ に注意して $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1 < r$ である。