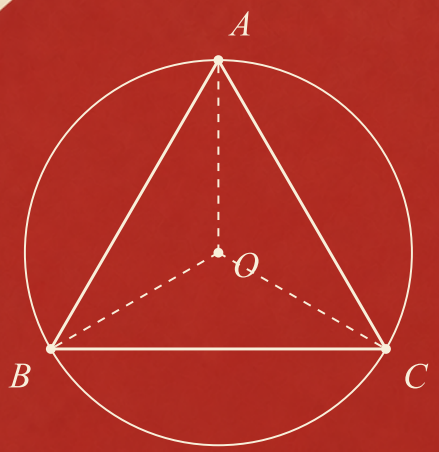
京都大学

理系

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

京都大学

理系数学

2017〜2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、京都大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	13
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	25
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	37
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	49
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	61
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	73
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	87
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	99
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	111

分野索引 …… 123

2026 年度 京都大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

a は 1 より大きい実数とし，k は実数とする．$0 < x < 1$ において定義された関数を

$$f(x) = \frac{1}{x^2\left(\log \dfrac{a}{x}\right)^2}$$

とおく．$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点がちょうど 2 個存在するような実数の組 (a, k) の集合を，座標平面に図示せよ．ただし $\log x$ は自然対数とする．また，$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

解説

f を直接微分する代わりに、分母の平方根 $h(x) = x\log(a/x)$ を調べます。$a > 1, 0 < x < 1$ より $h(x) > 0$ なので、$f(x) = k$ は $k > 0$ のとき $h(x) = 1/\sqrt{k}$ と同値です。平方から負の枝を加える必要はありません。

$h = x(\log a - \log x)$ なので、積の微分から $h' = \log a - \log x - 1$ です。左端では $x\log a \to 0$ と与えられた $x\log x \to 0$ を別々に使い、$h \to 0$ を得ます。従って $f \to +\infty$ です。f の値は常に正であり、$k \leqq 0$ では交点が全くありません。$k > 0$ へ限定した後に平方根を取ると、一つの正の高さ $c = 1/\sqrt{k}$ だけを調べれば済みます。

$h'(x) = \log(a/x) - 1$ より、停留点は $x = a/e$ です。これが区間に入るかどうかで $a \geqq e$ と $1 < a < e$ を分けます。前者では h が狭義単調増加し、f は狭義単調減少なので二共有点はありません。$a = e$ でも停留点は除外された端 $x = 1$ であり、区間内は単調です。

$1 < a < e$ では h が a/e まで増え、その後は減ります。左端の極限は 0、右端は $\log a$ で、最大値は a/e です。右端の値より最大値が厳密に大きいことも、$a/e - \log a$ の増減から確認します。

二解をもつ水平線の高さ c は $\log a < c < a/e$ です。$c = a/e$ では接する一解だけ、$c = \log a$ では右側の解が $x = 1$ となって除かれるため、左側の一解だけです。この端点の扱いが二つの厳密不等号を決めます。

増加側の h の値は 0 より大きく最大値まで、減少側では $\log a$ より大きく最大値までです。高さ c が右端の極限以下なら、増加側の解だけが残ります。最大値を超えれば両側とも解がなく、最大値なら二つの枝が同じ点で合います。二解の範囲は、この二つの値の範囲の共通部分から最大値を除いたものです。$x = 1$ を含む閉区間として数えてしまうと、上側の境界 $k = 1/(\log a)^2$ を誤って含めます。

$c = 1/\sqrt{k}$ へ戻すと、正の逆数の大小が逆転して $e^2/a^2 < k < 1/(\log a)^2$ です。各増減区間での連続性により、この間の k なら一解ずつ実際に存在します。図では $a = 1, e$ と上下の曲線を含まず、上側の曲線が $a \to 1 + 0$ で無限大へ伸び、二曲線が $(e, 1)$ で合わさる形を示します。

高さの不等式から k への変換は、正の数だけなので両辺を二乗し、逆数を取って行えます。$\log a < c < a/e$ の左右を逆にした $e^2/a^2 < 1/c^2 < 1/(\log a)^2$ が求める範囲です。既に示した $\log a < a/e$ から下側の曲線が上側より低いことも保証されます。横座標 a は底のパラメータであり、元のグラフの横座標 x とは別です。図ではこの二曲線間を塗り、$a = e$ で幅が 0 になってもその点を加えません。

2 答案

$h(x)=x\log\frac{a}{x}$ とおく。$0<x<1$，$a>1$ であるから $\frac{a}{x}>1$ であり，$h(x)>0$ である。また $f(x)=\frac{1}{h(x)^2}$ である。

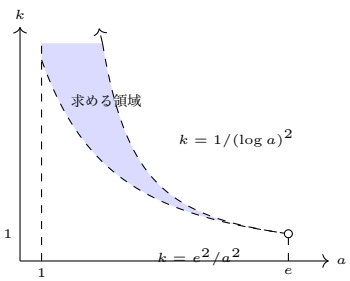
まず $h(x)$ の増減を調べる。微分すると $h'(x)=\log\frac{a}{x}-1$ である。また，問題文で与えられた極限を用いると $\lim_{x\to+0}h(x)=\lim_{x\to+0}x(\log a-\log x)=0$ である。さらに $\lim_{x\to1-0}h(x)=\log a$ である。$a\geqq e$ のとき，$0<x<1$ では $\log\frac{a}{x}>\log a\geqq 1$ である。したがって $h'(x)>0$ であり，$h(x)$ は単調増加する。このとき $f(x)=1/h(x)^2$ は単調減少するので，水平線 $y=k$ との共有点がちょうど 2 個になることはない。

次に $1<a<e$ とする。このとき $h'(x)=0$ となるのは $\log\frac{a}{x}=1$ すなわち $x=\frac{a}{e}$ である。$1<a<e$ より $0<a/e<1$ である。$h'(x)>0$ となるのは $0<x<a/e$，$h'(x)<0$ となるのは $a/e<x<1$ なので，$h(x)$ は $x=a/e$ で最大値をとる。その最大値は $h\left(\frac{a}{e}\right)=\frac{a}{e}\log e=\frac{a}{e}$ である。

また $0<\log a<\frac{a}{e}$ である。実際，$u(a)=a/e-\log a$ とおくと，$1<a<e$ で $u'(a)=\frac{1}{e}-\frac{1}{a}<0$ であり，$u(e)=0$ だから $u(a)>0$ である。$y=f(x)$ と $y=k$ が共有点を持つには，まず $k>0$ が必要である。そのとき $f(x)=k$ は $h(x)=\frac{1}{\sqrt{k}}$ と同値である。$1<a<e$ の場合，$h(x)=c$ が $0<x<1$ にちょうど 2 つの解をもつのは，水平線 $y=c$ が右端の極限値 $\log a$ より上，最大値 a/e より下にあるときである。すなわち $\log a<c<\frac{a}{e}$ である。ここで $c=1/\sqrt{k}$ とおくと $\log a<\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{a}{e}$ である。これを k について解くと $\frac{e^2}{a^2}<k<\frac{1}{(\log a)^2}$ である。

したがって，求める実数の組 (a,k) の集合は $1<a<e$，$\frac{e^2}{a^2}<k<\frac{1}{(\log a)^2}$ である。座標平面では，a 軸を横軸，k 軸を縦軸として，$1<a<e$ の範囲で 2 つの曲線 $k=\frac{e^2}{a^2}$，$k=\frac{1}{(\log a)^2}$ の間の開いた領域を図示すればよい。

境界はいずれも含まれないので破線で描く。求める領域は次の網掛け部分である。



2026 年度 京都大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

r は正の実数とする．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA 上に点 P をとる．点 P が辺 OA 上のどこにあっても，点 P を中心とする半径 r の球面が，辺 BC と共有点をもたないような r の範囲を求めよ．ただし，点 O，A は辺 OA に含まれ，点 B，C は辺 BC に含まれるとする．

1 解説

球面と球の内部を区別します。半径が十分大きいと辺 BC 全体が球の内部に入りますが、球面との共有点はなくなります。そのため答えは小さい半径だけの範囲になるとは限りません。中心 P と辺上の点 Q をともに動かし、距離 PQ が取りうる値の全体を求め、その外側を選びます。

対辺の中点 M, N を使うと、OA, BC, MN の三方向が互いに垂直になります。これは正三角形の中線の垂直性と、$ON = AN$ である二等辺三角形の中線から分かります。$ON = \sqrt{3}/2$, $OM = 1/2$ なので、三平方の定理によって $MN^2 = 1/2$ です。

$OB = OC$ より ON は BC へ垂直で、$AB = AC$ より AN も同様です。この二方向を含む平面 OAN の中の OA, MN は、どちらも BC へ垂直です。また $ON = AN$ なので、三角形 OAN の頂点 N から底辺の中点 M へ引く線も垂直です。これで三方向の直交性を図の見かけによらず確認できます。特に MN は対辺間の距離であり、二つの正三角形の高さ $\sqrt{3}/2$ そのものではありません。

各辺の長さが 1 なので、点の位置を中点からの符号つきの係数 u, v で表せば、どちらも $-1/2$ から $1/2$ まで動きます。負の値を取りうる係数を、そのまま距離 MP, NQ と呼ばないようにします。三方向の直交性から $PQ^2 = u^2+v^2+1/2$ となり、最小値 $1/2$ と最大値 1 が分かります。

位置の分解は

$$\overrightarrow{PQ} = -u\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MN} + v\overrightarrow{BC}$$

です。これを自分自身と内積を取ると、異なる方向の積は全て 0 となり、三つの長さの二乗だけが残ります。$u = v = 0$ が最短の中点同士に対応し、$|u| = |v| = 1/2$ が最長の端点同士に対応します。端点を含むという問題の指定は、この最大値と最小値が本当に取られることに使います。

ただし最大・最小だけでは、途中の値が欠けないことをまだ示していません。$u^2+v^2 = w$ となる u, v を、$0 \leqq w \leqq 1/4$ と $1/4 \leqq w \leqq 1/2$ で具体的に選び、全区間が実現することを確認します。したがって $1/\sqrt{2} \leqq r \leqq 1$ ならどこかの中心で共有点が生じ、その区間の外ではどの中心でも生じません。両端は中点どうし、または端点どうしで実際に達成するので、答えの境界から除きます。

途中の距離 r を実現するには $w = r^2 - 1/2$ と置きます。$w \leqq 1/4$ なら $(u, v) = (\sqrt{w}, 0)$、$w \geqq 1/4$ なら $(1/2, \sqrt{w - 1/4})$ です。両方で各係数は辺の許容範囲に入ります。「どの P でも共有点がない」を否定するには、一組の P, Q で $PQ = r$ となれば十分なので、この構成で閉区間全体を排除できます。反対に $r > 1$ なら全ての距離が r 未満となり、辺が球の内部にあっても球面には届きません。

2 答案

辺 OA の中点を M，辺 BC の中点を N とする。$OB = OC,\ AB = AC$ より ON, AN はともに BC に垂直であり、$OM = AM$ と $ON = AN$ から MN は OA に垂直である。このため、対辺 OA と BC は垂直であり，また MN は両方の辺に垂直である。正四面体の 1 辺の長さは 1 なので，三角形 OBC は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。したがって，頂点 O から辺 BC の中点 N までの距離は $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

また $OM = 1/2$ であり，$MN \perp OA$ だから $MN^2 = ON^2 - OM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である。よって $MN = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

辺 OA 上の点 P と辺 BC 上の点 Q の位置を $\overrightarrow{MP} = u\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{NQ} = v\overrightarrow{BC}$ と表す。辺の長さは 1 で、M, N は各辺の中点なので、$-\frac{1}{2} \leqq u, v \leqq \frac{1}{2}$ である。したがって $MP^2 = u^2,\ NQ^2 = v^2$ となる。OA, BC, MN は互いに直交する方向にあるので, $PQ^2 = MP^2 + MN^2 + NQ^2 = u^2 + \frac{1}{2} + v^2$ である。

したがって，P と Q がそれぞれ辺 OA，辺 BC 上を動くとき，距離 PQ の 2 乗は $u^2 + v^2 + \frac{1}{2}$ の形で表される。ただし $u^2 \leqq 1/4$，$v^2 \leqq 1/4$ であるから，その最小値は $\frac{1}{2}$ であり，最大値は $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ である。さらに $w = u^2 + v^2$ は $0 \leqq w \leqq 1/2$ のすべての値をとる。実際，$0 \leqq w \leqq 1/4$ では $u = \sqrt{w},\ v = 0$，$1/4 \leqq w \leqq 1/2$ では $u = 1/2,\ v = \sqrt{w - 1/4}$ と選べばよい。したがって，距離 PQ の取りうる値は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq PQ \leqq 1$ のすべてである。

点 P を中心とする半径 r の球面が辺 BC と共有点をもつのは，ある $Q \in BC$ について $PQ = r$ となるときである。したがって，どこかの $P \in OA$ で共有点が生じる半径は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq 1$ である。

問題では，点 P が辺 OA 上のどこにあっても共有点をもたないことを要求している。よって求める r の範囲は，この区間の外側であり，$r > 0$ に注意して $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 1 < r$ である。

3 2026 年度 京都大学・理系 第 3 問

【数学（理系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

n は正の整数とする．整数係数の多項式

$$(x+1)^{2^{n+1}}-(x^2+1)^{2^n}$$

のすべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m のうち，最大のものは $n+1$ であることを示せ．

1 解説

「最大の m」を示すには、全係数が 2^{n+1} の倍数であることと、少なくとも一係数が 2^{n+2} の倍数でないことを分けます。後者は一次係数に注目すれば容易ですが、それだけで前者を示したことにはなりません。

全係数を一個ずつ調べると、指数 2^{n+1} に応じて項数が増えます。そこで二つの多項式の共通部分 x^2+1 を先にまとめ、差を取ることで消える項を明示します。$j \geqq 1$ の各項は x^j を含み、その係数の整数部分 $2^j\,{}_N\mathrm{C}_j$ が十分な 2 の因子をもてば、残りをどれだけ展開しても各係数へ同じ因子が残ります。全体の係数の相殺を調べる必要がなくなる形です。

$N=2^n$ として、$(x+1)^{2N}=\{(x^2+1)+2x\}^N$ を二項展開します。引かれる $(x^2+1)^N$ が $j=0$ の項を消し、各残りの項に $2^j\,{}_N\mathrm{C}_j$ が掛かります。この整数に含まれる 2 の因子の個数を調べれば、項をさらに展開した全係数の整除性も保証できます。

$j=2^q u$、u を奇数と書き、${}_{2^n}\mathrm{C}_j=(2^n/j)\,{}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}$ を使います。後ろの二項係数の分子と分母では、2^n-s と s に含まれる 2 の因子の個数が同じです。$s=2^r v$ なら $r<n$ で、$2^n-s=2^r(2^{n-r}-v)$ の括弧内も奇数だからです。したがって後ろの係数は奇数で、前の係数には正確に $n-q$ 個の 2 が含まれます。

この判定では有理数の形にある式も、最終的な二項係数が整数であることを使います。分子と分母から同じ数の 2 を取り除いた後は、奇数同士の比です。約分して整数になっても、分母が奇数であるため 2 の因子は新たに生じません。$j=1$ では後ろの係数は ${}_{2^n-1}\mathrm{C}_0=1$、$j=2^n$ でも後ろは 1 で、同じ議論が両端を含みます。後者では $q=n$ となり、二項係数そのものは 1 です。

2^j を掛けた因子数は $n+j-q$ です。$2^q \geqq q+1$ は $q=0$ からの簡単な帰納で示せるので、$j \geqq 2^q$ から $j-q \geqq 1$ となります。各項が必要な倍数であるため、整数係数の $(x^2+1)^{N-j}$ を掛け、項どうしを足しても整除性は保たれます。

最後に一次係数は $j=1$ の項だけから $2N=2^{n+1}$ と分かります。これが一段大きい 2 のべきでは割れないため、最大値を確定できます。

補助不等式 $2^q \geqq q+1$ は $q=0$ で等号、次へ進むと $2^{q+1} \geqq 2q+2 \geqq q+2$ です。これに $j \geqq 2^q$ を合わせて $j-q \geqq 1$ が従います。一次項については、$j \geqq 2$ なら最小次数が 2 以上なので寄与できず、$j=1$ の $(x^2+1)^{N-1}$ の定数項 1 だけが寄与します。ゆえに他の項との相殺で一次係数の 2 の因子が増えることはありません。全係数への下界と、この一係数による上界を合わせて $m=n+1$ です。

2 答案

$N=2^n$ とおく。与えられた多項式は $(x+1)^{2^{n+1}}-(x^2+1)^{2^n}=\{(x+1)^2\}^N-(x^2+1)^N$ である。ここで $(x+1)^2=x^2+2x+1=(x^2+1)+2x$ だから，二項定理より

$$\{(x^2+1)+2x\}^N-(x^2+1)^N=\sum_{j=1}^{N}{}_N\mathrm{C}_j(2x)^j(x^2+1)^{N-j}$$

である。

まず，この多項式のすべての係数が 2^{n+1} で割り切れることを示す。$1\leqq j\leqq N$ とし，j を割り切る最大の 2 の累乗を 2^q とする。すなわち $j=2^qu$ とおく。ただし u は奇数である。

次に ${}_{2^n}\mathrm{C}_j=\frac{2^n}{j}{}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}$ を用いる。ここで ${}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}$ は奇数である。実際,

$${}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}=\frac{(2^n-1)(2^n-2)\cdots(2^n-(j-1))}{1\cdot2\cdots(j-1)}$$

と書いたとき，$1\leqq s<2^n$ について，s と 2^n-s は同じ回数だけ 2 で割り切れる。したがって分子と分母に含まれる 2 の個数は等しく，この二項係数は 2 で割り切れない。

したがって，${}_{2^n}\mathrm{C}_j$ は 2^{n-q} で割り切れ，2^{n-q+1} では割り切れない。よって ${}_N\mathrm{C}_j(2x)^j$ の係数部分は，少なくとも $2^{n-q}\cdot2^j=2^{n+j-q}$ で割り切れる。ここで $j\geqq1$ かつ $2^q\leqq j$ であるから，常に $j-q\geqq1$ が成り立つ。ゆえに $n+j-q\geqq n+1$ である。

また $(x^2+1)^{N-j}$ は整数係数の多項式なので，これを掛けても 2^{n+1} で割り切れる性質は失われない。したがって，展開後のすべての係数は 2^{n+1} で割り切れる。

次に，2^{n+2} ではすべての係数が割り切れないことを示す。x の係数を見る。上の和で，x の 1 次の項を生むのは $j=1$ の項だけである。$j=1$ の項は ${}_N\mathrm{C}_1(2x)(x^2+1)^{N-1}=2Nx(x^2+1)^{N-1}$ であるから，x の係数は $2N=2\cdot2^n=2^{n+1}$ である。これは 2^{n+2} では割り切れない。

以上より，すべての係数は 2^{n+1} で割り切れるが，すべての係数が 2^{n+2} で割り切れるわけではない。したがって，求める最大の m は $n+1$ である。

2026 年度 京都大学・理系 第 4 問

【数学（理系）第 4 問】〈2026 年度・前期日程〉

平面において，次の条件 (∗) を満たす正三角形の 1 辺の長さの最小値を求めよ．

(∗) 1 辺の長さが 1 の正方形であって，4 つの頂点がすべてその正三角形の内部または辺上にあるようなものが存在する．

1 解説

単位正方形の中心を O とし、辺を座標軸に平行に置きます。正三角形の向きだけを動かして、必要な高さの下限を求めます。正方形の頂点が三角形内なら、線分で結ばれる正方形全体も内側にあります。したがって O も三角形内で、O と各辺が作る三つの小三角形の面積を足せます。

三辺の外向きの垂直方向を $\theta, \theta+2\pi/3, \theta+4\pi/3$ とします。方向 ϕ で正方形の点の内積の最大値は $(|\cos\phi|+|\sin\phi|)/2$ です。各成分の符号に応じて頂点 $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ を選ぶと達成できます。

例えば $\cos\phi$ が負なら $x=-1/2$ を選ぶことで $x\cos\phi = |\cos\phi|/2$ となります。y も独立に同じ選択をできるので、二項の最大値を同時に達成できます。三角形の辺の外向きの単位ベクトルを $\vec{n}_j$ とすれば、辺の内側は $\overrightarrow{OX}\cdot\vec{n}_j \leqq d_j$ です。正方形のどの点 X にもこの不等式が必要だから、d_j は各方向の最大値以上です。正方形を含む辺は、その最大値以上の距離で O から離れていなければなりません。

O から三辺への距離の和は正三角形の高さです。これは三つの小三角形に共通の底辺長を掛けて面積を足し、元の三角形の面積と比較して示せます。したがって必要な高さは、先ほどの三方向の最大値の和以上です。一般の図形の包み込みの公式を引用せず、この面積分割から下限を得ます。

向きを $\pi/2$ 変えると正方形が同じになり、$2\pi/3$ 変えると三辺の順が変わるだけです。二つの差 $\pi/6$ だけ変えても和は同じなので、$0 \leqq \theta \leqq \pi/6$ を調べれば十分です。絶対値の符号を外すと、高さの下限は $F(\theta) = \{(2+\sqrt{3})\cos\theta + \sin\theta\}/2$ となり、中央で最大、両端で最小です。

この区間で三方向の余弦の符号は正、負、負、正弦は正、正、負です。従って余弦の絶対値の和は $2\cos\theta$、正弦側は $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ になります。加法定理で各項を展開すると F の式が得られます。微分が 0 となる条件は $\tan\theta = 1/(2+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3}$ で、$\theta = \pi/12$ です。導関数はその前で正、後で負なので、この停留点は最小でなく最大です。

最後に端の向きで、正方形へ接する三直線から実際の正三角形を作ります。四頂点がその辺上に入り、高さの下限を達成するため、求めた一辺の長さは実際の最小値です。

達成例は $x = 1/2$ と、$-x/2 \pm \sqrt{3}\,y/2 = (1+\sqrt{3})/4$ の三直線です。単位正方形の四頂点を各内側の不等式へ代入すると、いずれも右辺以下です。右側二頂点は最初の辺上、左上と左下の頂点はそれぞれ斜辺上にあります。右側の二頂点間の三角形の辺長は $1+2/\sqrt{3}$ で、左頂点からの斜辺も同じです。高さと辺長の関係 $h = \sqrt{3}L/2$ から得た下限を、この具体的配置が確かに達成しています。

2 答案

単位正方形を $-\frac{1}{2} \leqq x, y \leqq \frac{1}{2}$ とする。正方形を含む正三角形の一辺を L、高さを h とし、正方形の中心 O から三辺へ下ろした垂線の長さを d_0, d_1, d_2 とする。O は正三角形の内部にあるので、面積を三つに分けて

$$\frac{1}{2}Lh = \frac{1}{2}L(d_0 + d_1 + d_2), \quad h = d_0 + d_1 + d_2.$$

三辺の外向きの単位法線の方向を $\theta + 2j\pi/3$、$j = 0, 1, 2$ とする。方向 ϕ に対し、正方形の点の内積の最大値は

$$\max_{-\frac{1}{2} \leqq x, y \leqq \frac{1}{2}} (x\cos\phi + y\sin\phi) = \frac{|\cos\phi| + |\sin\phi|}{2}.$$

正方形が各辺の内側にあるため

$$h \geqq F(\theta),$$

$$F(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2}\left|\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{3}\right)\right| + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2}\left|\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{3}\right)\right|.$$

F は $\pi/2$ および $2\pi/3$ だけ向きを変えても同じで、したがって $\pi/6$ を周期とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi/6$ では絶対値の符号を調べて

$$F(\theta) = \frac{(2+\sqrt{3})\cos\theta + \sin\theta}{2}.$$

$$F'(\theta) = \frac{-(2+\sqrt{3})\sin\theta + \cos\theta}{2}$$

は $\theta = \pi/12$ の前で正、後で負である。よって最小値は端点で、

$$F(0) = F(\pi/6) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

$h = (\sqrt{3}/2)L$ より

$$L \geqq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

逆に、三直線

$$x = \frac{1}{2},$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\,y}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{4},$$

$$-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}\,y}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

で囲まれる三角形を取る。頂点は

$$\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

で、三辺とも長さ $1+2/\sqrt{3}$ である。単位正方形の四頂点は三辺の内側または辺上にある。よって下限を達成し、求める最小値は

$$1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

