大学入試過去問シリーズ

京都大学

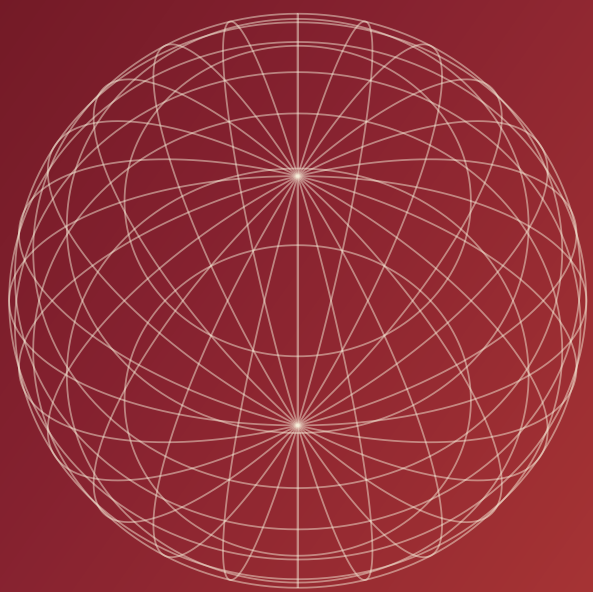
理系（前期・後期）

数学

1987-2026

過去問

40 年分



解答編

解説・答案・別解

Evolton

大学入試過去問シリーズ

京都大学

理系数学

1987〜2026 年度　前期・後期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、京都大学の前期・後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。1987〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 40 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

共通問題も、各区分における小問の順序と番号に従います。旧課程の選択問題や京都大学の理系甲・乙は、元の区分を併記します。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 40 年（1987〜2026 年度)、後期 18 年（1989〜2006 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	1
2025 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	13
2024 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	25
2023 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	37
2022 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	49
2021 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	61
2020 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	73
2019 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	87
2018 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	99
2017 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	111
2016 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	123
2015 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	135
2014 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	147
2013 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	159
2012 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	171
2011 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	183
2010 年度	前期・乙 第 1 問、前期・乙 第 2 問、前期・乙 第 3 問、前期・乙 第 4 問、 前期・乙 第 5 問、前期・乙 第 6 問、前期・甲 第 1 問、前期・甲 第 2 問、 前期・甲 第 3 問、前期・甲 第 4 問、前期・甲 第 5 問、前期・甲 第 6 問	195
2009 年度	前期・乙 第 1 問、前期・乙 第 2 問、前期・乙 第 3 問、前期・乙 第 4 問、 前期・乙 第 5 問、前期・乙 第 6 問、前期・甲 第 1 問、前期・甲 第 2 問、 前期・甲 第 3 問、前期・甲 第 4 問、前期・甲 第 5 問、前期・甲 第 6 問	219
2008 年度	前期・乙 第 1 問、前期・乙 第 2 問、前期・乙 第 3 問、前期・乙 第 4 問、 前期・乙 第 5 問、前期・乙 第 6 問、前期・甲 第 1 問、前期・甲 第 2 問、 前期・甲 第 3 問、前期・甲 第 4 問、前期・甲 第 5 問、前期・甲 第 6 問	243
2007 年度	前期・乙 第 1 問、前期・乙 第 2 問、前期・乙 第 3 問、前期・乙 第 4 問、 前期・乙 第 5 問、前期・乙 第 6 問、前期・甲 第 1 問、前期・甲 第 2 問、 前期・甲 第 3 問、前期・甲 第 4 問、前期・甲 第 5 問、前期・甲 第 6 問	267
2006 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、 前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、 後期 第 5 問、後期 第 6 問	291

年度	問題	ページ
2005 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	315
2004 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	339
2003 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	363
2002 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	387
2001 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	411
2000 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	435
1999 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	459
1998 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	483
1997 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	507
1996 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	531
1995 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	555
1994 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	579
1993 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	603
1992 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	628
1991 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	652

年度	問題	ページ
1990 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	676
1989 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	701
1988 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	725
1987 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	737

分野索引 749

2026 年度 京都大学・理系 第 1 問（前期）

【数学（理系）第 1 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

a は 1 より大きい実数とし，k は実数とする．$0 < x < 1$ において定義された関数を

$$f(x) = \frac{1}{x^2\left(\log \dfrac{a}{x}\right)^2}$$

とおく．$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点がちょうど 2 個存在するような実数の組 (a, k) の集合を，座標平面に図示せよ．ただし $\log x$ は自然対数とする．また，$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

解説

f を直接微分する代わりに、分母の平方根 $h(x) = x\log(a/x)$ を調べます。$a > 1, 0 < x < 1$ より $h(x) > 0$ なので、$f(x) = k$ は $k > 0$ のとき $h(x) = 1/\sqrt{k}$ と同値です。平方から負の枝を加える必要はありません。

$h = x(\log a - \log x)$ なので、積の微分から $h' = \log a - \log x - 1$ です。左端では $x\log a \to 0$ と与えられた $x\log x \to 0$ を別々に使い、$h \to 0$ を得ます。従って $f \to +\infty$ です。f の値は常に正であり、$k \leqq 0$ では交点が全くありません。$k > 0$ へ限定した後に平方根を取ると、一つの正の高さ $c = 1/\sqrt{k}$ だけを調べれば済みます。

$h'(x) = \log(a/x) - 1$ より、停留点は $x = a/e$ です。これが区間に入るかどうかで $a \geqq e$ と $1 < a < e$ を分けます。前者では h が狭義単調増加し、f は狭義単調減少なので二共有点はありません。$a = e$ でも停留点は除外された端 $x = 1$ であり、区間内は単調です。

$1 < a < e$ では h が a/e まで増え、その後は減ります。左端の極限は 0、右端は $\log a$ で、最大値は a/e です。右端の値より最大値が厳密に大きいことも、$a/e - \log a$ の増減から確認します。

二解をもつ水平線の高さ c は $\log a < c < a/e$ です。$c = a/e$ では接する一解だけ、$c = \log a$ では右側の解が $x = 1$ となって除かれるため、左側の一解だけです。この端点の扱いが二つの厳密不等号を決めます。

増加側の h の値は 0 より大きく最大値まで、減少側では $\log a$ より大きく最大値までです。高さ c が右端の極限以下なら、増加側の解だけが残ります。最大値を超えれば両側とも解がなく、最大値なら二つの枝が同じ点で合います。二解の範囲は、この二つの値の範囲の共通部分から最大値を除いたものです。$x = 1$ を含む閉区間として数えてしまうと、上側の境界 $k = 1/(\log a)^2$ を誤って含めます。

$c = 1/\sqrt{k}$ へ戻すと、正の逆数の大小が逆転して $e^2/a^2 < k < 1/(\log a)^2$ です。各増減区間での連続性により、この間の k なら一解ずつ実際に存在します。図では $a = 1, e$ と上下の曲線を含まず、上側の曲線が $a \to 1 + 0$ で無限大へ伸び、二曲線が $(e, 1)$ で合わさる形を示します。

高さの不等式から k への変換は、正の数だけなので両辺を二乗し、逆数を取って行えます。$\log a < c < a/e$ の左右を逆にした $e^2/a^2 < 1/c^2 < 1/(\log a)^2$ が求める範囲です。既に示した $\log a < a/e$ から下側の曲線が上側より低いことも保証されます。横座標 a は底のパラメータであり、元のグラフの横座標 x とは別です。図ではこの二曲線間を塗り、$a = e$ で幅が 0 になってもその点を加えません。

2　答案

$h(x)=x\log\frac{a}{x}$ とおく。$0<x<1$，$a>1$ であるから $\frac{a}{x}>1$ であり，$h(x)>0$ である。また $f(x)=\frac{1}{h(x)^2}$ である。

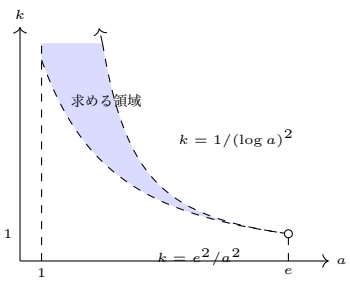
まず $h(x)$ の増減を調べる。微分すると $h'(x)=\log\frac{a}{x}-1$ である。また，問題文で与えられた極限を用いると $\lim_{x\to+0}h(x)=\lim_{x\to+0}x(\log a-\log x)=0$ である。さらに $\lim_{x\to1-0}h(x)=\log a$ である。$a\geqq e$ のとき，$0<x<1$ では $\log\frac{a}{x}>\log a\geqq 1$ である。したがって $h'(x)>0$ であり，$h(x)$ は単調増加する。このとき $f(x)=1/h(x)^2$ は単調減少するので，水平線 $y=k$ との共有点がちょうど 2 個になることはない。

次に $1<a<e$ とする。このとき $h'(x)=0$ となるのは $\log\frac{a}{x}=1$ すなわち $x=\frac{a}{e}$ である。$1<a<e$ より $0<a/e<1$ である。$h'(x)>0$ となるのは $0<x<a/e$，$h'(x)<0$ となるのは $a/e<x<1$ なので，$h(x)$ は $x=a/e$ で最大値をとる。その最大値は $h\left(\frac{a}{e}\right)=\frac{a}{e}\log e=\frac{a}{e}$ である。

また $0<\log a<\frac{a}{e}$ である。実際，$u(a)=a/e-\log a$ とおくと，$1<a<e$ で $u'(a)=\frac{1}{e}-\frac{1}{a}<0$ であり，$u(e)=0$ だから $u(a)>0$ である。$y=f(x)$ と $y=k$ が共有点を持つには，まず $k>0$ が必要である。そのとき $f(x)=k$ は $h(x)=\frac{1}{\sqrt{k}}$ と同値である。$1<a<e$ の場合，$h(x)=c$ が $0<x<1$ にちょうど 2 つの解をもつのは，水平線 $y=c$ が右端の極限値 $\log a$ より上，最大値 a/e より下にあるときである。すなわち $\log a<c<\frac{a}{e}$ である。ここで $c=1/\sqrt{k}$ とおくと $\log a<\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{a}{e}$ である。これを k について解くと $\frac{e^2}{a^2}<k<\frac{1}{(\log a)^2}$ である。

したがって，求める実数の組 (a,k) の集合は $1<a<e$，$\frac{e^2}{a^2}<k<\frac{1}{(\log a)^2}$ である。座標平面では，a 軸を横軸，k 軸を縦軸として，$1<a<e$ の範囲で 2 つの曲線 $k=\frac{e^2}{a^2}$，$k=\frac{1}{(\log a)^2}$ の間の開いた領域を図示すればよい。

境界はいずれも含まれないので破線で描く。求める領域は次の網掛け部分である。



2026 年度 京都大学・理系 第 2 問（前期）

【数学（理系）第 2 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

r は正の実数とする．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA 上に点 P をとる．点 P が辺 OA 上のどこにあっても，点 P を中心とする半径 r の球面が，辺 BC と共有点をもたないような r の範囲を求めよ．ただし，点 O，A は辺 OA に含まれ，点 B，C は辺 BC に含まれるとする．

1　解説

球面と球の内部を区別します。半径が十分大きいと辺 BC 全体が球の内部に入りますが、球面との共有点はなくなります。そのため答えは小さい半径だけの範囲になるとは限りません。中心 P と辺上の点 Q をともに動かし、距離 PQ が取りうる値の全体を求め、その外側を選びます。

対辺の中点 M, N を使うと、OA, BC, MN の三方向が互いに垂直になります。これは正三角形の中線の垂直性と、$ON = AN$ である二等辺三角形の中線から分かります。$ON = \sqrt{3}/2$, $OM = 1/2$ なので、三平方の定理によって $MN^2 = 1/2$ です。

$OB = OC$ より ON は BC へ垂直で、$AB = AC$ より AN も同様です。この二方向を含む平面 OAN の中の OA, MN は、どちらも BC へ垂直です。また $ON = AN$ なので、三角形 OAN の頂点 N から底辺の中点 M へ引く線も垂直です。これで三方向の直交性を図の見かけによらず確認できます。特に MN は対辺間の距離であり、二つの正三角形の高さ $\sqrt{3}/2$ そのものではありません。

各辺の長さが 1 なので、点の位置を中点からの符号つきの係数 u, v で表せば、どちらも $-1/2$ から $1/2$ まで動きます。負の値を取りうる係数を、そのまま距離 MP, NQ と呼ばないようにします。三方向の直交性から $PQ^2 = u^2+v^2+1/2$ となり、最小値 $1/2$ と最大値 1 が分かります。

位置の分解は

$$\overrightarrow{PQ} = -u\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MN} + v\overrightarrow{BC}$$

です。これを自分自身と内積を取ると、異なる方向の積は全て 0 となり、三つの長さの二乗だけが残ります。$u = v = 0$ が最短の中点同士に対応し、$|u| = |v| = 1/2$ が最長の端点同士に対応します。端点を含むという問題の指定は、この最大値と最小値が本当に取られることに使います。

ただし最大・最小だけでは、途中の値が欠けないことをまだ示していません。$u^2+v^2 = w$ となる u, v を、$0 \leqq w \leqq 1/4$ と $1/4 \leqq w \leqq 1/2$ で具体的に選び、全区間が実現することを確認します。したがって $1/\sqrt{2} \leqq r \leqq 1$ ならどこかの中心で共有点が生じ、その区間の外ではどの中心でも生じません。両端は中点どうし、または端点どうしで実際に達成するので、答えの境界から除きます。

途中の距離 r を実現するには $w = r^2 - 1/2$ と置きます。$w \leqq 1/4$ なら $(u, v) = (\sqrt{w}, 0)$、$w \geqq 1/4$ なら $(1/2, \sqrt{w - 1/4})$ です。両方で各係数は辺の許容範囲に入ります。「どの P でも共有点がない」を否定するには、一組の P, Q で $PQ = r$ となれば十分なので、この構成で閉区間全体を排除できます。反対に $r > 1$ なら全ての距離が r 未満となり、辺が球の内部にあっても球面には届きません。

2 答案

辺 OA の中点を M，辺 BC の中点を N とする。$OB = OC,\ AB = AC$ より ON, AN はともに BC に垂直であり、$OM = AM$ と $ON = AN$ から MN は OA に垂直である。このため、対辺 OA と BC は垂直であり，また MN は両方の辺に垂直である。正四面体の 1 辺の長さは 1 なので，三角形 OBC は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。したがって，頂点 O から辺 BC の中点 N までの距離は $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

また $OM = 1/2$ であり，$MN \perp OA$ だから $MN^2 = ON^2 - OM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である。よって $MN = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

辺 OA 上の点 P と辺 BC 上の点 Q の位置を $\overrightarrow{MP} = u\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{NQ} = v\overrightarrow{BC}$ と表す。辺の長さは 1 で、M, N は各辺の中点なので、$-\frac{1}{2} \leqq u, v \leqq \frac{1}{2}$ である。したがって $MP^2 = u^2,\ NQ^2 = v^2$ となる。OA, BC, MN は互いに直交する方向にあるので，$PQ^2 = MP^2 + MN^2 + NQ^2 = u^2 + \frac{1}{2} + v^2$ である。

したがって，P と Q がそれぞれ辺 OA，辺 BC 上を動くとき，距離 PQ の 2 乗は $u^2 + v^2 + \frac{1}{2}$ の形で表される。ただし $u^2 \leqq 1/4$，$v^2 \leqq 1/4$ であるから，その最小値は $\frac{1}{2}$ であり，最大値は $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ である。さらに $w = u^2 + v^2$ は $0 \leqq w \leqq 1/2$ のすべての値をとる。実際，$0 \leqq w \leqq 1/4$ では $u = \sqrt{w},\ v = 0$，$1/4 \leqq w \leqq 1/2$ では $u = 1/2,\ v = \sqrt{w - 1/4}$ と選べばよい。したがって，距離 PQ の取りうる値は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq PQ \leqq 1$ のすべてである。

点 P を中心とする半径 r の球面が辺 BC と共有点をもつのは，ある $Q \in BC$ について $PQ = r$ となるときである。したがって，どこかの $P \in OA$ で共有点が生じる半径は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq 1$ である。

問題では，点 P が辺 OA 上のどこにあっても共有点をもたないことを要求している。よって求める r の範囲は，この区間の外側であり，$r > 0$ に注意して $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 1 < r$ である。

3 2026 年度 京都大学・理系 第 3 問（前期）

【数学（理系）第 3 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

n は正の整数とする．整数係数の多項式

$$(x+1)^{2^{n+1}}-(x^2+1)^{2^n}$$

のすべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m のうち，最大のものは $n+1$ であることを示せ．

1 解説

「最大の m」を示すには、全係数が 2^{n+1} の倍数であることと、少なくとも一係数が 2^{n+2} の倍数でないことを分けます。後者は一次係数に注目すれば容易ですが、それだけで前者を示したことにはなりません。

全係数を一個ずつ調べると、指数 2^{n+1} に応じて項数が増えます。そこで二つの多項式の共通部分 x^2+1 を先にまとめ、差を取ることで消える項を明示します。$j \geqq 1$ の各項は x^j を含み、その係数の整数部分 $2^j\,{}_N\mathrm{C}_j$ が十分な 2 の因子をもてば、残りをどれだけ展開しても各係数へ同じ因子が残ります。全体の係数の相殺を調べる必要がなくなる形です。

$N=2^n$ として、$(x+1)^{2N}=\{(x^2+1)+2x\}^N$ を二項展開します。引かれる $(x^2+1)^N$ が $j=0$ の項を消し、各残りの項に $2^j\,{}_N\mathrm{C}_j$ が掛かります。この整数に含まれる 2 の因子の個数を調べれば、項をさらに展開した全係数の整除性も保証できます。

$j=2^q u$、u を奇数と書き、${}_{2^n}\mathrm{C}_j=(2^n/j)\,{}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}$ を使います。後ろの二項係数の分子と分母では、2^n-s と s に含まれる 2 の因子の個数が同じです。$s=2^r v$ なら $r<n$ で、$2^n-s=2^r(2^{n-r}-v)$ の括弧内も奇数だからです。したがって後ろの係数は奇数で、前の係数には正確に $n-q$ 個の 2 が含まれます。

この判定では有理数の形にある式も、最終的な二項係数が整数であることを使います。分子と分母から同じ数の 2 を取り除いた後は、奇数同士の比です。約分して整数になっても、分母が奇数であるため 2 の因子は新たに生じません。$j=1$ では後ろの係数は ${}_{2^n-1}\mathrm{C}_0=1$、$j=2^n$ でも後ろは 1 で、同じ議論が両端を含みます。後者では $q=n$ となり、二項係数そのものは 1 です。

2^j を掛けた因子数は $n+j-q$ です。$2^q \geqq q+1$ は $q=0$ からの簡単な帰納で示せるので、$j \geqq 2^q$ から $j-q \geqq 1$ となります。各項が必要な倍数であるため、整数係数の $(x^2+1)^{N-j}$ を掛け、項どうしを足しても整除性は保たれます。

最後に一次係数は $j=1$ の項だけから $2N=2^{n+1}$ と分かります。これが一段大きい 2 のべきでは割れないため、最大値を確定できます。

補助不等式 $2^q \geqq q+1$ は $q=0$ で等号、次へ進むと $2^{q+1} \geqq 2q+2 \geqq q+2$ です。これに $j \geqq 2^q$ を合わせて $j-q \geqq 1$ が従います。一次項については、$j \geqq 2$ なら最小次数が 2 以上なので寄与できず、$j=1$ の $(x^2+1)^{N-1}$ の定数項 1 だけが寄与します。ゆえに他の項との相殺で一次係数の 2 の因子が増えることはありません。全係数への下界と、この一係数による上界を合わせて $m=n+1$ です。

2 答案

$N=2^n$ とおく。与えられた多項式は $(x+1)^{2^{n+1}}-(x^2+1)^{2^n}=\{(x+1)^2\}^N-(x^2+1)^N$ である。ここで $(x+1)^2=x^2+2x+1=(x^2+1)+2x$ だから，二項定理より

$$\{(x^2+1)+2x\}^N-(x^2+1)^N=\sum_{j=1}^{N}{}_N\mathrm{C}_j(2x)^j(x^2+1)^{N-j}$$

である。

まず，この多項式のすべての係数が 2^{n+1} で割り切れることを示す。$1\leqq j\leqq N$ とし，j を割り切る最大の 2 の累乗を 2^q とする。すなわち $j=2^qu$ とおく。ただし u は奇数である。

次に ${}_{2^n}\mathrm{C}_j=\frac{2^n}{j}{}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}$ を用いる。ここで ${}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}$ は奇数である。実際,

$${}_{2^n-1}\mathrm{C}_{j-1}=\frac{(2^n-1)(2^n-2)\cdots(2^n-(j-1))}{1\cdot2\cdots(j-1)}$$

と書いたとき，$1\leqq s<2^n$ について，s と 2^n-s は同じ回数だけ 2 で割り切れる。したがって分子と分母に含まれる 2 の個数は等しく，この二項係数は 2 で割り切れない。

したがって，${}_{2^n}\mathrm{C}_j$ は 2^{n-q} で割り切れ，2^{n-q+1} では割り切れない。よって ${}_N\mathrm{C}_j(2x)^j$ の係数部分は，少なくとも $2^{n-q}\cdot2^j=2^{n+j-q}$ で割り切れる。ここで $j\geqq1$ かつ $2^q\leqq j$ であるから，常に $j-q\geqq1$ が成り立つ。ゆえに $n+j-q\geqq n+1$ である。

また $(x^2+1)^{N-j}$ は整数係数の多項式なので，これを掛けても 2^{n+1} で割り切れる性質は失われない。したがって，展開後のすべての係数は 2^{n+1} で割り切れる。

次に，2^{n+2} ではすべての係数が割り切れないことを示す。x の係数を見る。上の和で，x の 1 次の項を生むのは $j=1$ の項だけである。$j=1$ の項は ${}_N\mathrm{C}_1(2x)(x^2+1)^{N-1}=2Nx(x^2+1)^{N-1}$ であるから，x の係数は $2N=2\cdot2^n=2^{n+1}$ である。これは 2^{n+2} では割り切れない。

以上より，すべての係数は 2^{n+1} で割り切れるが，すべての係数が 2^{n+2} で割り切れるわけではない。したがって，求める最大の m は $n+1$ である。