

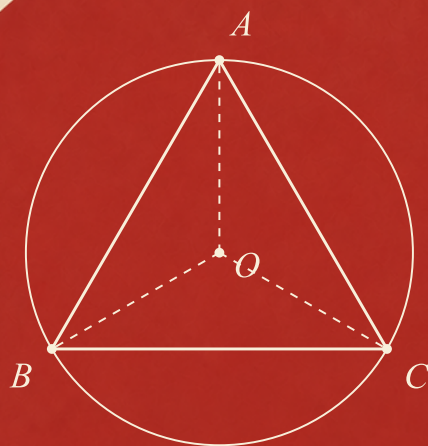
京都大学

理系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

京都大学

理系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton



はじめに

本書は、京都大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	13
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	25
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	37
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	49
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	61
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	73
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	87
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	99
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	111
分野索引		123



2026 年度 京都大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

a は 1 より大きい実数とし、 k は実数とする。 $0 < x < 1$ において定義された関数を

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \left(\log \frac{a}{x} \right)^2}$$

とおく。 $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点がちょうど 2 個存在するような実数の組 (a, k) の集合を、座標平面に図示せよ。ただし $\log x$ は自然対数とする。また、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい。

1

解説

f を直接微分する代わりに、分母の平方根 $h(x) = x \log(a/x)$ を調べます。 $a > 1, 0 < x < 1$ より $h(x) > 0$ なので、 $f(x) = k$ は $k > 0$ のとき $h(x) = 1/\sqrt{k}$ と同値です。平方から負の枝を加える必要はありません。

$h = x(\log a - \log x)$ なので、積の微分から $h' = \log a - \log x - 1$ です。左端では $x \log a \rightarrow 0$ と与えられた $x \log x \rightarrow 0$ を別々に使い、 $h \rightarrow 0$ を得ます。従って $f \rightarrow +\infty$ です。 f の値は常に正であり、 $k \leq 0$ では交点が全くありません。 $k > 0$ へ限定した後には平方根を取ると、一つの正の高さ $c = 1/\sqrt{k}$ だけを調べれば済みます。

$h'(x) = \log(a/x) - 1$ より、停留点は $x = a/e$ です。これが区間に入るかどうかで $a \geq e$ と $1 < a < e$ を分けます。前者では h が狭義単調増加し、 f は狭義単調減少なので二共有点はありません。 $a = e$ でも停留点は除外された端 $x = 1$ であり、区間内は単調です。

$1 < a < e$ では h が a/e まで増え、その後は減ります。左端の極限は 0、右端は $\log a$ で、最大値は a/e です。右端の値より最大値が厳密に大きいことも、 $a/e - \log a$ の増減から確認します。

二解をもつ水平線の高さ c は $\log a < c < a/e$ です。 $c = a/e$ では接する一解だけ、 $c = \log a$ では右側の解が $x = 1$ となって除かれるため、左側の一解だけです。この端点の扱いが二つの厳密不等号を決めます。

増加側の h の値は 0 より大きく最大値まで、減少側では $\log a$ より大きく最大値までです。高さ c が右端の極限以下なら、増加側の解だけが残ります。最大値を超えれば両側とも解がなく、最大値なら二つの枝が同じ点で合います。二解の範囲は、この二つの値の範囲の共通部分から最大値を除いたものです。 $x = 1$ を含む閉区間として数えてしまうと、上側の境界 $k = 1/(\log a)^2$ を誤って含めます。

$c = 1/\sqrt{k}$ へ戻すと、正の逆数の大小が逆転して $e^2/a^2 < k < 1/(\log a)^2$ です。各増減区間での連続性により、この間の k なら一解ずつ実際に存在します。図では $a = 1, e$ と上下の曲線を含まず、上側の曲線が $a \rightarrow 1 + 0$ で無限大へ伸び、二曲線が $(e, 1)$ で合わさる形を示します。

高さの不等式から k への変換は、正の数だけなので両辺を二乗し、逆数を取って行えます。 $\log a < c < a/e$ の左右を逆にした $e^2/a^2 < 1/c^2 < 1/(\log a)^2$ が求める範囲です。既に示した $\log a < a/e$ から下側の曲線が上側より低いことも保証されます。横座標 a は底のパラメータであり、元のグラフの横座標 x とは別です。図ではこの二曲線間を塗り、 $a = e$ で幅が 0 になってもその点を加えません。

2 答案

$h(x) = x \log \frac{a}{x}$ とおく。 $0 < x < 1$, $a > 1$ であるから $\frac{a}{x} > 1$ であり, $h(x) > 0$ である。また $f(x) = \frac{1}{h(x)^2}$ である。

まず $h(x)$ の増減を調べる。微分すると $h'(x) = \log \frac{a}{x} - 1$ である。また, 問題文で与えられた極限を用いると $\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x(\log a - \log x) = 0$ である。さらに $\lim_{x \rightarrow 1-0} h(x) = \log a$ である。 $a \geq e$ のとき, $0 < x < 1$ では $\log \frac{a}{x} > \log a \geq 1$ である。したがって $h'(x) > 0$ であり, $h(x)$ は単調増加する。このとき $f(x) = 1/h(x)^2$ は単調減少するので, 水平線 $y = k$ との共有点がちょうど 2 個になることはない。

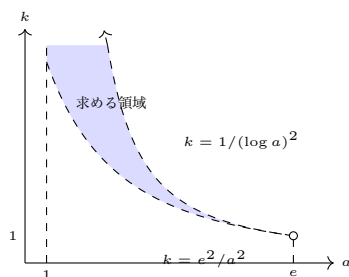
次に $1 < a < e$ とする。このとき $h'(x) = 0$ となるのは $\log \frac{a}{x} = 1$ すなわち $x = \frac{a}{e}$ である。 $1 < a < e$ より $0 < a/e < 1$ である。 $h'(x) > 0$ となるのは $0 < x < a/e$, $h'(x) < 0$ となるのは $a/e < x < 1$ なので, $h(x)$ は $x = a/e$ で最大値をとる。その最大値は $h\left(\frac{a}{e}\right) = \frac{a}{e} \log e = \frac{a}{e}$ である。

また $0 < \log a < \frac{a}{e}$ である。実際, $u(a) = a/e - \log a$ とおくと, $1 < a < e$ で $u'(a) = \frac{1}{e} - \frac{1}{a} < 0$ であり, $u(e) = 0$ だから $u(a) > 0$ である。 $y = f(x)$ と $y = k$ が共有点を持つには, まず $k > 0$ が必要である。そのとき $f(x) = k$ は $h(x) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ と同値である。 $1 < a < e$ の場

合, $h(x) = c$ が $0 < x < 1$ にちょうど 2 つの解をもつのは, 水平線 $y = c$ が右端の極限値 $\log a$ より上, 最大値 a/e より下にあるときである。すなわち $\log a < c < \frac{a}{e}$ である。ここで $c = 1/\sqrt{k}$ とおくと $\log a < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{a}{e}$ である。これを k について解くと $\frac{e^2}{a^2} < k < \frac{1}{(\log a)^2}$ である。

したがって, 求める実数の組 (a, k) の集合は $1 < a < e$, $\frac{e^2}{a^2} < k < \frac{1}{(\log a)^2}$ である。座標平面では, a 軸を横軸, k 軸を縦軸として, $1 < a < e$ の範囲で 2 つの曲線 $k = \frac{e^2}{a^2}$, $k = \frac{1}{(\log a)^2}$ の間の開いた領域を図示すればよい。

境界はいずれも含まれないので破線で描く。求める領域は次の網掛け部分である。





2026 年度 京都大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

r は正の実数とする. 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において, 辺 OA 上に点 P をとる. 点 P が辺 OA 上のどこにあっても, 点 P を中心とする半径 r の球面が, 辺 BC と共有点をもたないような r の範囲を求めよ. ただし, 点 O, A は辺 OA に含まれ, 点 B, C は辺 BC に含まれるとする.

1

解説

球面と球の内部を区別します. 半径が十分大きいと辺 BC 全体が球の内部に入りますが, 球面との共有点はありません. そのため答えは小さい半径だけの範囲になるとは限りません. 中心 P と辺上の点 Q をともに動かし, 距離 PQ が取りうる値の全体を求め, その外側を選びます.

対辺の中点 M, N を使うと, OA, BC, MN の三方向が互いに垂直になります. これは正三角形の中線の垂直性と, $ON = AN$ である二等辺三角形の中線から分かります. $ON = \sqrt{3}/2, OM = 1/2$ なので, 三平方の定理によって $MN^2 = 1/2$ です.

$OB = OC$ より ON は BC へ垂直で, $AB = AC$ より AN も同様です. この二方向を含む平面 OAN の中の OA, MN は, どちらも BC へ垂直です. また $ON = AN$ なので, 三角形 OAN の頂点 N から底辺の中点 M へ引く線も垂直です. これで三方向の直交性を図の見かけによらず確認できます. 特に MN は対辺間の距離であり, 二つの正三角形の高さ $\sqrt{3}/2$ そのものではありません.

各辺の長さが 1 なので, 点の位置を中点からの符号付きの係数 u, v で表せば, どちらも $-1/2$ から $1/2$ まで動きます. 負の値を取りうる係数を, そのまま距離 MP, NQ と呼ばないようにします. 三方向の直交性から $PQ^2 = u^2 + v^2 + 1/2$ となり, 最小値 $1/2$ と最大値 1 が分かります.

位置の分解は

$$\overrightarrow{PQ} = -u\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MN} + v\overrightarrow{BC}$$

です. これを自分自身と内積を取ると, 異なる方向の積は全て 0 となり, 三つの長さの二乗だけが残ります. $u = v = 0$ が最短の中点同士に対応し, $|u| = |v| = 1/2$ が最長の端点同士に対応します. 端点を含むという問題の指定は, この最大値と最小値が本当に取られることに使います.

ただし最大・最小だけでは, 途中の値が欠けないことをまだ示していません. $u^2 + v^2 = w$ となる u, v を, $0 \leq w \leq 1/4$ と $1/4 \leq w \leq 1/2$ で具体的に選び, 全区間が実現することを確認します. したがって $1/\sqrt{2} \leq r \leq 1$ ならどこかの中心で共有点が生じ, その区間の外ではどの中心でも生じません. 両端は中点どうし, または端点どうしで実際に達成するので, 答えの境界から除きます.

途中の距離 r を実現するには $w = r^2 - 1/2$ と置きます. $w \leq 1/4$ なら $(u, v) = (\sqrt{w}, 0), w \geq 1/4$ なら $(1/2, \sqrt{w - 1/4})$ です. 両方で各係数は辺の許容範囲に入ります. 「どの P でも共有点がない」を否定するには, 一組の P, Q で $PQ = r$ となれば十分なので, この構成で閉区間全体を排除できます. 反対に $r > 1$ なら全ての距離が r 未満となり, 辺が球の内部にあっても球面には届きません.

2 答案

辺 OA の中点を M , 辺 BC の中点を N とする。
 $OB = OC$, $AB = AC$ より ON, AN はともに BC に垂直であり、 $OM = AM$ と $ON = AN$ から MN は OA に垂直である。このため、対辺 OA と BC は垂直であり、また MN は両方の辺に垂直である。正四面体の1辺の長さは1なので、三角形 OBC は1辺の長さが1の正三角形である。したがって、頂点 O から辺 BC の中点 N までの距離は $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

また $OM = 1/2$ であり、 $MN \perp OA$ だから
 $MN^2 = ON^2 - OM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である。よって $MN = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

辺 OA 上の点 P と辺 BC 上の点 Q の位置を $\overrightarrow{MP} = u\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{NQ} = v\overrightarrow{BC}$ と表す。辺の長さは1で、 M, N は各辺の中点なので、 $-\frac{1}{2} \leq u, v \leq \frac{1}{2}$ である。したがって $MP^2 = u^2$, $NQ^2 = v^2$ となる。 OA, BC, MN は互いに直交する方向にあるので、 $PQ^2 = MP^2 + MN^2 + NQ^2 = u^2 + \frac{1}{2} + v^2$ である。

したがって、 P と Q がそれぞれ辺 OA , 辺 BC 上を動くとき、距離 PQ の2乗は $u^2 + v^2 + \frac{1}{2}$ の形で表される。ただし $u^2 \leq 1/4$, $v^2 \leq 1/4$ であるから、その最小値は $\frac{1}{2}$ であり、最大値は $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ である。さらに $w = u^2 + v^2$ は $0 \leq w \leq 1/2$ のすべての値をとる。実際、 $0 \leq w \leq 1/4$ では $u = \sqrt{w}$, $v = 0$, $1/4 \leq w \leq 1/2$ では $u = 1/2$, $v = \sqrt{w - 1/4}$ と選べばよい。したがって、距離 PQ の取りうる値は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq PQ \leq 1$ のすべてである。

点 P を中心とする半径 r の球面が辺 BC と共有点をもつのは、ある $Q \in BC$ について $PQ = r$ となるときである。したがって、どこかの $P \in OA$ で共有点が生じる半径は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1$ である。

問題では、点 P が辺 OA 上のどこにあっても共有点をもたないことを要求している。よって求める r の範囲は、この区間の外側であり、 $r > 0$ に注意して $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1 < r$ である。