大学入試過去問シリーズ

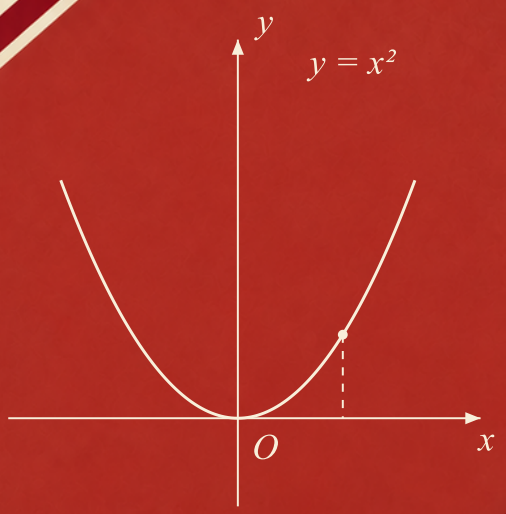
# 九州大学

## 理系（前期・後期）

# 数学

## 過去問10年

2017-2026




## 解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

# 九州大学

## 理系数学

2017〜2026 年度　前期・後期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

## はじめに

本書は、九州大学の前期・後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

共通問題も、各区分における小問の順序と番号に従います。旧課程の選択問題や京都大学の理系甲・乙は、元の区分を併記します。

## 本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）、後期 10 年（2017〜2026 年度）です。

## 収録年度・問題


| 年度 | 問題 | ページ |
|---|---|---|
| 2026 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 1 |
| 2025 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 21 |
| 2024 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 42 |
| 2023 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 63 |
| 2022 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 84 |
| 2021 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 107 |
| 2020 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 127 |
| 2019 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 147 |
| 2018 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 167 |
| 2017 年度 | 前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問 | 188 |

分野索引 …… 209

# 2026 年度 九州大学・理系 第 1 問（前期）

【数学（理系）第 1 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

座標空間内で，原点 $O$ を中心とする半径 3 の球を $S$ とする。また，点 $P(1,\,0,\,\sqrt{3})$ を考え，$T_1$ と $T_2$ を直線 $OP$ と直交する相異なる 2 つの平面とする。$T_1$ と $S$ の共通部分を $C_1$，$T_2$ と $S$ の共通部分を $C_2$ とし，次の 2 つの条件をみたすとする。

- $C_1$ と $C_2$ はどちらも半径 1 の円である。
- $C_1$ の中心の $z$ 座標は正で，$C_2$ の中心の $z$ 座標は負である。

以下の問いに答えよ。

**(1)** 円 $C_1$，$C_2$ の中心の座標を求めよ。

**(2)** 円 $C_1$，$C_2$ を底面とする円柱の側面を平面 $z=0$ で切る。その切り口の曲線の方程式を求めよ。また，その曲線を図示せよ。

## 解説

球を平面で切った円の中心は、球の中心から平面へ下ろした垂線の足である。今回は切断平面が $OP$ に垂直なので、両円の中心は直線 $OP$ 上にある。半径三の球、半径一の断面円、中心間距離は直角三角形を作り、中心間距離は $2\sqrt{2}$ となる。

直線の方向を長さ一のベクトル $\vec{n}=\overrightarrow{OP}/2$ で表せば、円の中心の位置ベクトルは $\pm 2\sqrt{2}\vec{n}$ になる。単位化せずに方向の成分へ距離を直接掛けると、中心までの距離が二倍になるので注意する。正負の二つを、$z$ 座標の符号でそれぞれの円へ対応させる。

(2) の円柱の側面は、軸 $OP$ からの距離が一で、かつ両底面の間にある点の集合である。まず無限に続く円柱の距離条件を式にし、最後に有限の長さの条件を確認する。この二条件を分けると、切り口の式を求めやすい。

切断面上の点を $X(x,y,0)$ とする。軸へ正射影したベクトルは、方向成分 $\overrightarrow{OX}\cdot\vec{n}=x/2$ を $\vec{n}$ に掛けたものなので、垂線の足 $H$ は $\overrightarrow{OH}=(x/2)\vec{n}$ と表せる。単位ベクトルを使っているため、係数がそのまま符号付きの軸方向距離になる。

$OH$ と $HX$ は垂直なので、軸までの距離平方は $OX^2-OH^2$ である。$OX^2=x^2+y^2$、$OH^2=x^2/4$ を引いて

$$HX^2=\frac{3}{4}x^2+y^2$$

を得る。側面は距離一であるから、これを一に等しいと置けば楕円の式になる。立体の内側の切断面を求めるなら不等式になるが、設問は側面の曲線なので等式で答える。

この楕円がすべて有限の円柱の中に入るか確認する。式から $|x|\leqq 2/\sqrt{3}$ となり、軸方向距離の絶対値は $|x|/2\leqq 1/\sqrt{3}$ である。底面は軸上の $\pm 2\sqrt{2}$ にあるので、この上限は両底面の間に収まる。したがって楕円の一部を切り落とす必要はなく、全体が切り口になる。

逆に楕円上の点は軸までの距離一と有限の範囲をともに満たすため、求める側面上にある。必要条件の計算だけでなく、この逆も含めて曲線が一致する。

図では二軸との交点を求め、横の半径が $2/\sqrt{3}$、縦の半径が一であることを反映する。円柱の半径が一でも、斜めの切断は横へ伸びた楕円になる。球の断面で中心の位置を決める議論と、円柱の軸からの距離で楕円を決める議論は、異なる断面条件である。

## 2 答案

**(1)**

$$\overrightarrow{OP}=(1,0,\sqrt{3}),\qquad |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{1+3}=2$$

である。平面 $T_1, T_2$ は直線 $OP$ と直交しているので，球 $S$ との共通部分である円 $C_1, C_2$ の中心は直線 $OP$ 上にある。

球 $S$ の半径は 3 であり，断面円の半径は 1 である。球の中心 $O$ から断面円の中心までの距離を $d$ とすると，直角三角形より $d^2+1^2=3^2$ だから $d=2\sqrt{2}$ である。直線 $OP$ の単位方向ベクトルを $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(1,0,\sqrt{3})$ とする。円の中心を $K$ とすると，その位置ベクトルの候補は $\overrightarrow{OK}=\pm 2\sqrt{2}\vec{n}=\pm(\sqrt{2},0,\sqrt{6})$ である。$C_1$ の中心の $z$ 座標は正，$C_2$ の中心の $z$ 座標は負なので，

$$C_1 \text{ の中心 } (\sqrt{2},0,\sqrt{6}),\qquad C_2 \text{ の中心 } (-\sqrt{2},0,-\sqrt{6})$$

である。

**(2)** 軸の単位方向ベクトルを

$$\vec{n}=\frac{1}{2}(1,0,\sqrt{3})$$

とする。平面 $z=0$ 上の点 $X(x,y,0)$ では

$$\overrightarrow{OX}\cdot\vec{n}=\frac{x}{2}.$$

軸への垂線の足を $H$ とすると

$$\overrightarrow{OH}=\frac{x}{2}\vec{n}$$

であり，$OH$ と $HX$ は垂直だから

$$HX^2=OX^2-OH^2=x^2+y^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3}{4}x^2+y^2.$$

円柱の半径は 1 なので，切り口の式は

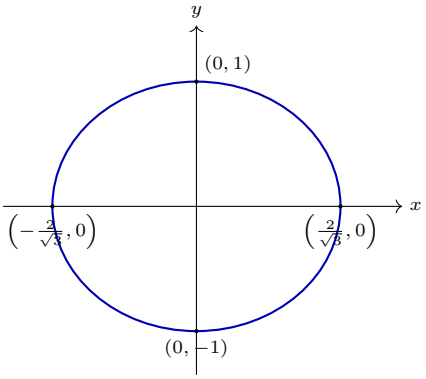
$$\frac{3}{4}x^2+y^2=1.$$

この式では $|x|\leqq 2/\sqrt{3}$ なので，軸方向成分は

$$\left|\overrightarrow{OX}\cdot\vec{n}\right|=\frac{|x|}{2}\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{2}.$$

底面の軸方向の位置は $\pm 2\sqrt{2}$ だから，この楕円上の点はすべて両底面の間にある。よって，有限な円柱の側面の切り口としても，上の式が必要十分である。

中心は原点で，$x$ 軸方向の半径 $2/\sqrt{3}$，$y$ 軸方向の半径 1 の楕円となる。実際の切り口は次の楕円である。




$\frac{3}{4}x^2+y^2=1$

## 2026 年度 九州大学・理系 第 2 問（前期）

【数学（理系）第 2 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

点 $z$ が複素数平面上の線分

$$z = t + ti \quad \left( \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

の上を動くとき，

$$z^2 - wz + 1 = 0$$

をみたす複素数 $w$ を表す点が描く軌跡を $C$ とする。ただし，$i$ は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

**(1)** 軌跡 $C$ を複素数平面上に図示せよ。

**(2)** $t = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 $w$ を表す点を $P_1$ とし，$t = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 $w$ を表す点を $P_2$ とする。このとき，軌跡 $C$，線分 $OP_1$，線分 $OP_2$ で囲まれる領域を虚軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，$O$ は複素数平面の原点である。

### 解説

与えられた二次式を $w$ について解くと、軌跡の変換は $w = z + 1/z$ になる。$t$ の下端も正なので $z \neq 0$ であり、割る操作が使える。$z = t(1+i)$ の逆数は共役を掛けて $(1-i)/(2t)$ と求める。

$w = X + Yi$ とすると、実部と虚部は $X = t + 1/(2t)$、$Y = t - 1/(2t)$ になる。和と差を取れば $X + Y = 2t$、$X - Y = 1/t$ なので、積から $X^2 - Y^2 = 2$ を得る。二つの平方を直接展開するより、和と差の積ならパラメータがすぐに消える。

この双曲線の等式だけでは左右両枝を含んでしまう。$t > 0$ から $X+Y > 0, X-Y > 0$ となり、$X > 0$ が分かるので、右枝に限られる。また端点を代入して $Y = -1, 1$ を得るが、端点だけでは途中の軌跡が欠けないとはいえない。

そこで $Y'(t) = 1+1/(2t^2) > 0$ を確認する。$Y$ は連続に増加するため、端点間のすべての値を一度ずつ取る。対応する $X$ は正の平方根 $\sqrt{Y^2+2}$ に決まり、軌跡は右枝の閉じた一つの弧となる。パラメータ消去と値の実現範囲を両方確かめて、図示する曲線を確定する。

端点の計算では $1/t$ を有理化すると、$1+\sqrt{3}$ と $\sqrt{3}-1$ が入れ替わる関係になる。このため端点は実部が同じで、虚部の符号だけが反対になる。図の弧も実軸に関して対称であり、後の体積積分にこの対称性を使える。

(2) の囲まれた領域は、各高さ $Y$ で、線分の側から双曲線の側までの横の線分になる。上半分の直線式は $X = \sqrt{3}Y$、下半分は $X = -\sqrt{3}Y$ なので、左端は $\sqrt{3}|Y|$ で表せる。右端の平方との差は $2 - 2Y^2 \geqq 0$ であり、指定区間で正しい左右関係になっている。

虚軸を回転軸とするので、半径は実部の距離である。領域は右半平面にあり、両端とも非負なので、回転断面は外半径 $\sqrt{Y^2+2}$、内半径 $\sqrt{3}|Y|$ の輪になる。零の高さだけは内半径が零で、円板としてつながる。

断面積では半径を二乗してから引くため、平方根と絶対値がともに消えて多項式になる。高さの端で断面積が零になることは、線分と弧がそこで一致する図とも合う。実軸の上下で対称なので、零から一までを二倍して積分しても同じ体積が得られる。軌跡の正の枝と、回転時の穴の半径を順につなげることが要点である。二つの線分は原点から伸びるので、下半分の式も正の実部を持つ形で使う。虚部が負だからという理由で半径に負の値を入れないよう、絶対値でまとめてから二乗する。

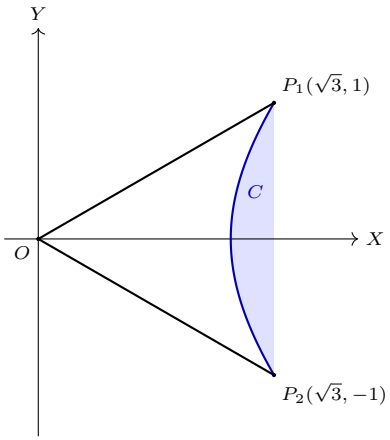
## 2 答案

**(1)** 与えられた方程式 $z^2 - wz + 1 = 0$ について，問題の範囲では $t > 0$ なので $z = t + ti \neq 0$ である。したがって両辺を $z$ で割って $w = z + \frac{1}{z}$ を得る。ここで $z = t(1+i)$ だから $\frac{1}{z} = \frac{1}{t(1+i)} = \frac{1-i}{2t}$ である。$w = X + Yi$ とおくと $X = t + \frac{1}{2t}, \quad Y = t - \frac{1}{2t}$ である。よって $X + Y = 2t, \quad X - Y = \frac{1}{t}$ となり，これらを掛けて $X^2 - Y^2 = 2$ を得る。

次に端点を求める。$t = (1+\sqrt{3})/2$ のとき $2t = 1+\sqrt{3}, \quad \frac{1}{t} = \sqrt{3}-1$ であるから $X = \frac{(X+Y)+(X-Y)}{2} = \sqrt{3}, \quad Y = \frac{(X+Y)-(X-Y)}{2} = 1$ である。したがって $P_1 = (\sqrt{3}, 1)$ である。また，$t = (-1+\sqrt{3})/2$ のとき $2t = \sqrt{3} - 1, \quad \frac{1}{t} = \sqrt{3} + 1$ より $P_2 = (\sqrt{3}, -1)$ である。

さらに $Y'(t) = 1 + 1/(2t^2) > 0$ だから，$Y$ は連続に増加し，端点の値 $-1, 1$ の間をすべてとる。したがって途中の点が欠けることはない。また，$t > 0$ なので $X+Y = 2t > 0$，$X-Y = 1/t > 0$ であり，特に $X > 0$ である。したがって軌跡 $C$ は，双曲線 $X^2-Y^2 = 2$ の右側の枝のうち，端点 $P_2 = (\sqrt{3}, -1)$ から $P_1 = (\sqrt{3}, 1)$ までの部分である。すなわち $X = \sqrt{Y^2+2}, \quad -1 \leqq Y \leqq 1$ と表される曲線である。図示では，右に開く双曲線の枝を $Y = -1$ から $Y = 1$ まで切り取った弧として描けばよい。

軌跡と 2 本の線分は次のようになる。網掛け部分が (2) で回転させる領域である。




**(2)** 求める領域は，$-1 \leqq Y \leqq 1$ において，右側が双曲線 $X = \sqrt{Y^2+2}$ である。左側の境界は線分 $OP_1$ と線分 $OP_2$ である。$0 \leqq Y \leqq 1$ では線分 $OP_1$ 上にあり，その式は $X = \sqrt{3}Y$ である。$-1 \leqq Y \leqq 0$ では線分 $OP_2$ 上にあり，その式は $X = -\sqrt{3}Y$ である。したがってまとめて $X = \sqrt{3}|Y|$ と書ける。

この領域を虚軸，すなわち $Y$ 軸のまわりに 1 回転する。高さ $Y$ の断面は，外半径 $R(Y) = \sqrt{Y^2+2}$ 内半径 $r(Y) = \sqrt{3}|Y|$ の円環である。したがって体積は

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{1} \{R(Y)^2 - r(Y)^2\}\, dY \\
&= \pi \int_{-1}^{1} \{(Y^2+2) - 3Y^2\}\, dY \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (2 - 2Y^2)\, dY \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (1 - Y^2)\, dY \\
&= 2\pi \left[ Y - \frac{Y^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

## 3　2026 年度 九州大学・理系 第 3 問（前期）

【数学（理系）第 3 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

$0 < r < 1$ とする。表が出る確率が $r$，裏が出る確率が $1-r$ の硬貨を投げ，表が出た場合は白玉を 2 つ横並びに置き，裏が出た場合は黒玉を 1 つ置く。この要領で硬貨を繰り返し投げ，左から右に 1 列になるように白玉と黒玉を順に並べていく。

例えば，3 回硬貨を投げ，結果が順に「裏，表，表」であれば，左から順に「黒，白，白，白，白」と 5 つの玉が並ぶ。

$n$ を自然数とする。$n+2$ 回硬貨を投げたとき，左から $n$, $n+1$, $n+2$ 番目の玉がすべて黒である確率を $p_n$ とする。以下の問いに答えよ。

**(1)** $p_1$, $p_2$ を求めよ。

**(2)** $n \geqq 2$ とする。$n+2$ 回硬貨を投げたとき，左から 1, $n$, $n+1$, $n+2$ 番目の玉がすべて黒である確率を $p_{n-1}$ を用いて表せ。

**(3)** $n \geqq 3$ のとき，$p_n$ を $p_{n-2}$, $p_{n-1}$ を用いて表せ。

**(4)** $p_n$ を求めよ。

### 1　解説

硬貨を投げた回数と、列の中の玉の位置は一致しない。裏なら一つ、表なら二つ増えるため、最初の結果によって目標の位置が一つか二つずれる。$q = 1 - r$ と置き、最初の一回を取り除いた残りの列で条件を読み直す。

(1) で一番目から三番目を黒にするには、最初の三回がすべて裏でなければならない。二番目から四番目を黒にする場合も、最初が表なら二番目は白になって失敗するため、最初は裏に限られる。その後の三位置も黒なので、四回とも裏となる。初期値はここから求める。

(2) では先頭が黒という追加条件が、最初の結果を裏に固定する。先頭の一玉を取り除けば、目標の $n, n+1, n+2$ 番目は残りの $n-1, n, n+1$ 番目になる。残りの投数も $n+1 = (n-1)+2$ となり、$p_{n-1}$ の定義とちょうど一致する。最初の裏の確率を掛けて答える。

(3) は目標が三番目以降なので、最初が表でも裏でも可能性がある。裏の場合は (2) と同じ一位置の移動である。表の場合は先頭の二つの白玉を取り除き、目標が $n-2, n-1, n$ 番目へ移る。

ただし表の場合、残りの投数は $n+1$ で、$p_{n-2}$ の定義にある $n$ 回より一回多い。この違いを説明せずに定義を当てはめてはいけない。残りの最初の $n$ 回だけで少なくとも $n$ 個の玉が並ぶので、目標の三位置は既に確定している。最後の一回は列の右へ足すだけで、それらの色を変えない。

したがって表の場合の条件付き確率は $p_{n-2}$ でよい。二つの初回結果は排反で、その後の硬貨は初回から独立なので、各確率を掛けて足す。$p_n = qp_{n-1} + rp_{n-2}$ が成立するのは $n \geqq 3$ であり、最初の二項は別に使う。

(4) では $q + r = 1$ を利用して、隣接差の漸化式へ直す。$p_n - p_{n-1} = -r(p_{n-1} - p_{n-2})$ となり、差の数列は公比 $-r$ の等比数列である。初期の差は $q^4 - q^3 = -rq^3$ なので、符号も含めて一般の差を求める。

元の確率は最初の項に差の和を足して復元する。和の初めが指数零、最後が $n-1$ であることを確認し、等比級数の公式を使う。分母 $1+r$ は正で零ではない。得た式は一項目でも初期値に一致し、二項目では $q^4$ に戻る。負の公比により奇数回・偶数回で補正の符号が変わるが、硬貨の確率としての値は常に正になる。位置のずれと余分な投数を処理した後で、数列の計算へ進むことが重要である。

## 2 答案

以下では，裏が出る確率を $q=1-r$ とおく。裏が出ると黒玉が 1 つ置かれ，表が出ると白玉が 2 つ置かれることに注意する。

**(1)** $p_1$ は，$1+2=3$ 回硬貨を投げたとき，左から $1,2,3$ 番目の玉がすべて黒である確率である。1 番目の玉が黒であるためには 1 回目が裏でなければならず，さらに 2 番目，3 番目の玉も黒にするには 2 回目，3 回目も裏でなければならない。したがって $p_1=q^3$ である。$p_2$ は，4 回硬貨を投げたとき，左から $2,3,4$ 番目の玉がすべて黒である確率である。1 回目が表なら，最初に白玉が 2 つ並ぶので 2 番目の玉は白となり不可能である。よって 1 回目は裏でなければならない。このとき，残り 3 回で左から $1,2,3$ 番目に相当する玉がすべて黒である必要があるので，残り 3 回もすべて裏である。したがって $p_2=q^4$ である。すなわち $p_1=(1-r)^3,\quad p_2=(1-r)^4$ である。

**(2)** $n\geqq 2$ とする。左から 1 番目の玉が黒であるためには，1 回目が裏でなければならない。この確率は $q$ である。1 回目に黒玉が 1 つ置かれたあとは，残り $n+1$ 回の投げでできる列において，もとの左から $n,n+1,n+2$ 番目の玉は，残りの列の左から $n-1,\quad n,\quad n+1$ 番目に対応する。したがって，残り $n+1=(n-1)+2$ 回について定義される $p_{n-1}$ がその確率である。よって求める確率は $qp_{n-1}=(1-r)p_{n-1}$ である。

**(3)** $n\geqq 3$ とする。$p_n$ を，1 回目の硬貨の結果で分けて考える。

1 回目が裏である場合，先頭に黒玉が 1 つ置かれる。このとき，左から $n,n+1,n+2$ 番目の玉がすべて黒であるためには，残り $n+1$ 回でできる列の左から $n-1,\quad n,\quad n+1$ 番目の玉がすべて黒であればよい。これは $p_{n-1}$ の事象であるから，この場合の確率は $qp_{n-1}$ である。

1 回目が表である場合，先頭に白玉が 2 つ置かれる。このとき，目標の $n,n+1,n+2$ 番目の玉は，残りの列の左から $n-2,\quad n-1,\quad n$ 番目に対応する。残りの投げは $n+1$ 回あるが，最初の $n$ 回だけで列の長さは少なくとも $n$ になるので，残りの最後の 1 回はこれら $n-2,n-1,n$ 番目の玉には影響しない。したがってこの確率は $p_{n-2}$ であり，1 回目が表である確率 $r$ を掛けて $rp_{n-2}$ である。

以上より $p_n=(1-r)p_{n-1}+rp_{n-2}\qquad (n\geqq 3)$ である。

**(4)** (3) と $q=1-r$ から，$n\geqq 3$ で

$$p_n-p_{n-1}=-r(p_{n-1}-p_{n-2})$$

を得る。$p_2-p_1=q^4-q^3=-rq^3$ だから，差の数列は等比数列となり，

$$p_k-p_{k-1}=q^3(-r)^{k-1}\qquad (k\geqq 2).$$

したがって $n\geqq 2$ では

$$\begin{aligned}p_n&=p_1+\sum_{k=2}^{n}(p_k-p_{k-1})\\&=q^3\sum_{j=0}^{n-1}(-r)^j=\frac{q^3}{1+r}\{1-(-r)^n\}.\end{aligned}$$

$n=1$ でも右辺は $q^3=p_1$ に一致する。よって

$$p_n=\frac{(1-r)^3}{1+r}\{1-(-r)^n\}.$$

## 2026 年度 九州大学・理系 第 4 問（前期）

【数学（理系）第 4 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

以下の問いに答えよ。ただし，$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ が無理数であることは用いてよい。

**(1)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ を示せ。また $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを示せ。

**(2)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 4 次方程式を 1 つ求めよ。また，その 4 次方程式の解をすべて求めよ。

**(3)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 2 次方程式は存在しないことを示せ。

### 解説

(1) の根号の等式は、両辺を平方すると同じ値になることを示す。ただし平方が等しいだけでは正負が決まらない。$\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$ を確認し、正の平方根として等しいと結論する。

無理数であることは、平方の $5+2\sqrt{6}$ が無理数であることから示す。仮に元の和が有理数なら平方も有理数となり、$\sqrt{6}$ の無理数性に反する。二つの無理数の和は一般に有理数になる場合もあるので、単に両方が無理数という理由では結論できない。

(2) では平方して根号を一種類にまとめ、$x^2-5=2\sqrt{6}$ としてからさらに平方する。根号を消せば $x^4-10x^2+1=0$ を得る。二度の平方で解が増える可能性はあるが、ここで求めるのは元の数を一つの解に持つ方程式なので、増えた解を含めてよい。

全解は $X=x^2$ の二次方程式として求め、$X=5\pm2\sqrt{6}$ をそれぞれ平方の形へ戻す。$\sqrt{3}>\sqrt{2}$ より二つの平方根は正であり、各々に正負の符号を付けて四つの実解を得る。元の和だけを答えず、平方で生じた別の値も全て記す。

(3) では、もし二次方程式があるなら最高次の係数で割って $x^2+px+q=0$ とできる。$p, q$ は有理数である。まず $p=0$ を除く。この場合は $x^2=-q$ が有理数となるが、先に計算した平方は無理数なので矛盾する。元の数が無理数というだけでは、平方が有理数の可能性を除けない点に注意する。

$p\neq0$ なら式を $x=-(x^2+q)/p$ と解ける。平方の表示を入れると、ある有理数 $a, b$ を使って $x=a+b\sqrt{6}$ と書ける。この形へ押し込められることが、二次方程式を仮定した際の強い制約である。

両辺を平方し、有理数部分と $\sqrt{6}$ の係数を比較する。係数比較は、$U+V\sqrt{6}=0$ で有理数 $V\neq0$ なら $\sqrt{6}=-U/V$ となって矛盾するため、両係数が零になるという事実に基づく。

比較結果は $a^2+6b^2=5, ab=1$ であり、$a\neq0$ だから $b=1/a$ と消去できる。すると $a^4-5a^2+6=0$、すなわち $a^2=2$ または三になる。有理数の $a$ の絶対値が $\sqrt{2}$ または $\sqrt{3}$ となって、認められた無理数性に反する。

仮定から生じる全ての可能性を除いたので二次方程式は存在しない。四次式を作る操作と、二次式からは作れないことの証明は異なる論証であり、後者では有理数として表せる形を制限して矛盾を導いている。

## 2 答案

**(1)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は正である。また $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+3+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$ である。したがって，正の平方根をとって $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ である。

次に，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定する。このとき，その 2 乗も有理数である。しかし $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$ であり，$\sqrt{6}$ は無理数なので $5+2\sqrt{6}$ も無理数である。これは矛盾である。よって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることが示された。

**(2)** $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく。(1) の計算より $x^2=5+2\sqrt{6}$ であるから $x^2-5=2\sqrt{6}$ である。両辺を 2 乗して $(x^2-5)^2=24$ を得る。展開すると $x^4-10x^2+25=24$ すなわち $x^4-10x^2+1=0$ である。これは $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 4 次方程式の 1 つである。

この方程式の解をすべて求める。$X=x^2$ とおくと $X^2-10X+1=0$ である。したがって $X=5\pm 2\sqrt{6}$ である。ここで $5+2\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$，　$5-2\sqrt{6} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ である。よって 4 次方程式の解は $x=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，　$x=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ である。

**(3)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 2 次方程式が存在すると仮定する。最高次の係数で割れば，ある有理数 $p,q$ によって $x^2+px+q=0$ と書ける。ただし $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ である。

もし $p=0$ なら $x^2=-q$ となり，$x^2$ は有理数である。しかし $x^2=5+2\sqrt{6}$ は無理数であるから矛盾する。したがって $p\neq 0$ である。

このとき $x=-\frac{x^2+q}{p}=-\frac{5+q}{p}-\frac{2}{p}\sqrt{6}$ である。よって，ある有理数 $a,b$ を用いて $x=a+b\sqrt{6}$ と表せる。すなわち $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a+b\sqrt{6}$ である。両辺を 2 乗すると $5+2\sqrt{6}=a^2+6b^2+2ab\sqrt{6}$ となる。有理数 $U,V$ が $U+V\sqrt{6}=0$ をみたすなら，$V\neq 0$ では $\sqrt{6}=-U/V$ となって矛盾するため，$U=V=0$ である。この事実を上の式の両辺の差に使うと $a^2+6b^2=5$，　$2ab=2$ すなわち $a^2+6b^2=5$，　$ab=1$ を得る。$ab=1$ より $a\neq 0$ であり，$b=1/a$ である。これを代入して $a^2+\frac{6}{a^2}=5$ となる。$u=a^2$ とおくと $u^2-5u+6=0$ であるから $u=2$ または $u=3$ である。すなわち $a^2=2$ または $a^2=3$ である。しかし $a$ は有理数なので，これは $\sqrt{2}$ または $\sqrt{3}$ が有理数であることを意味し，問題で用いてよい無理数性に反する。

したがって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 2 次方程式は 存在しない。