

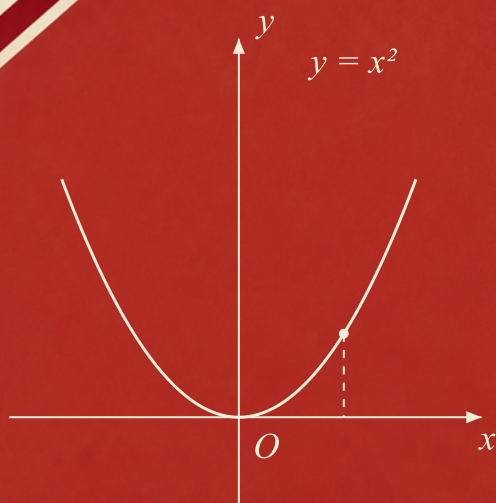
九州大学

理系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

九州大学

理系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編



はじめに

本書は、九州大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	21
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	31
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	42
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	55
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	65
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	75
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	85
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	95
分野索引		106



2026 年度 九州大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

座標空間内で、原点 O を中心とする半径 3 の球を S とする。また、点 $P(1, 0, \sqrt{3})$ を考え、 T_1 と T_2 を直線 OP と直交する相異なる 2 つの平面とする。 T_1 と S の共通部分を C_1 、 T_2 と S の共通部分を C_2 とし、次の 2 つの条件をみたすとする。

- C_1 と C_2 はどちらも半径 1 の円である。
- C_1 の中心の z 座標は正で、 C_2 の中心の z 座標は負である。

以下の問いに答えよ。

- (1) 円 C_1 、 C_2 の中心の座標を求めよ。
- (2) 円 C_1 、 C_2 を底面とする円柱の側面を平面 $z = 0$ で切る。その切り口の曲線の方程式を求めよ。また、その曲線を図示せよ。

1

解説

球を平面で切った円の中心は、球の中心から平面へ下ろした垂線の足である。今回は切断平面が OP に垂直なので、両円の中心は直線 OP 上にある。半径三の球、半径一の断面円、中心間距離は直角三角形を作り、中心間距離は $2\sqrt{2}$ となる。

直線 OP の方向を長さ一のベクトル $\vec{n} = \overrightarrow{OP}/2$ で表せば、円の中心の位置ベクトルは $\pm 2\sqrt{2}\vec{n}$ になる。単位化せずに方向の成分へ距離を直接掛けると、中心までの距離が二倍になるので注意する。正負の二つを、 z 座標の符号でそれぞれの円へ対応させる。

(2) の円柱の側面は、軸 OP からの距離が一で、かつ両底面の間にある点の集合である。まず無限に続く円柱の距離条件を式にし、最後に有限の長さの条件を確認する。この二条件を分けると、切り口の式を求めやすい。

切断面上の点を $X(x, y, 0)$ とする。軸へ正射影したベクトルは、方向成分 $\overrightarrow{OX} \cdot \vec{n} = x/2$ を $\vec{n}$ に掛けたものなので、垂線の足 H は $\overrightarrow{OH} = (x/2)\vec{n}$ と表せる。単位ベクトルを使っているため、係数がそのまま符号付きの軸方向距離になる。

OH と HX は垂直なので、軸までの距離平方は $OX^2 - OH^2$ である。 $OX^2 = x^2 + y^2$ 、 $OH^2 = x^2/4$ を引いて

$$HX^2 = \frac{3}{4}x^2 + y^2$$

を得る。側面は距離一であるから、これを一に等しいと置けば楕円の式になる。立体の内側の切断面を求めるなら不等式になるが、設問は側面の曲線なので等式で答える。

この楕円がすべて有限の円柱の中に入るか確認する。式から $|x| \leq 2/\sqrt{3}$ となり、軸方向距離の絶対値は $|x|/2 \leq 1/\sqrt{3}$ である。底面は軸上の $\pm 2\sqrt{2}$ にあるので、この上限は両底面の間に収まる。したがって楕円の一部を切り落とす必要はなく、全体が切り口になる。

逆に楕円上の点は軸までの距離一と有限の範囲をとともに満たすため、求める側面上にある。必要条件の計算だけでなく、この逆も含めて曲線が一致する。

図では二軸との交点を求め、横の半径が $2/\sqrt{3}$ 、縦の半径が一であることを反映する。円柱の半径が一でも、斜めの切断は横へ伸びた楕円になる。球の断面で中心の位置を決める議論と、円柱の軸からの距離で楕円を決める議論は、異なる断面条件である。

2 答案

(1)

$$\overrightarrow{OP} = (1, 0, \sqrt{3}), \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1+3} = 2$$

である。平面 T_1, T_2 は直線 OP と直交しているので、球 S との共通部分である円 C_1, C_2 の中心は直線 OP 上にある。

球 S の半径は 3 であり、断面円の半径は 1 である。球の中心 O から断面円の中心までの距離を d とすると、直角三角形より $d^2 + 1^2 = 3^2$ だから $d = 2\sqrt{2}$ である。直線 OP の単位方向ベクトルを $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(1, 0, \sqrt{3})$ とする。円の中心を K とすると、その位置ベクトルの候補は $\overrightarrow{OK} = \pm 2\sqrt{2}\vec{n} = \pm(\sqrt{2}, 0, \sqrt{6})$ である。 C_1 の中心の z 座標は正、 C_2 の中心の z 座標は負なので、

$$C_1 \text{ の中心 } (\sqrt{2}, 0, \sqrt{6}), \quad C_2 \text{ の中心 } (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{6})$$

である。

(2) 軸の単位方向ベクトルを

$$\vec{n} = \frac{1}{2}(1, 0, \sqrt{3})$$

とする。平面 $z = 0$ 上の点 $X(x, y, 0)$ では

$$\overrightarrow{OX} \cdot \vec{n} = \frac{x}{2}.$$

軸への垂線の足を H とすると

$$\overrightarrow{OH} = \frac{x}{2}\vec{n}$$

であり、 OH と HX は垂直だから

$$HX^2 = OX^2 - OH^2 = x^2 + y^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 + y^2.$$

円柱の半径は 1 なので、切り口の式は

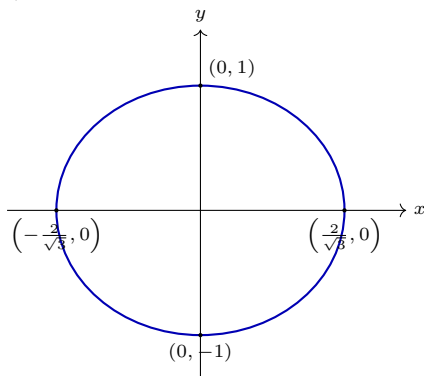
$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1.$$

この式では $|x| \leq 2/\sqrt{3}$ なので、軸方向成分は

$$|\overrightarrow{OX} \cdot \vec{n}| = \frac{|x|}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{2}.$$

底面の軸方向の位置は $\pm 2\sqrt{2}$ だから、この楕円上の点はすべて両底面の間にある。よって、有限な円柱の側面の切り口としても、上の式が必要十分である。

中心は原点で、 x 軸方向の半径 $2/\sqrt{3}$ 、 y 軸方向の半径 1 の楕円となる。実際の切り口は次の楕円である。



$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$$



2026 年度 九州大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

点 z が複素数平面上の線分

$$z = t + ti \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

の上を動くとき、

$$z^2 - wz + 1 = 0$$

をみたす複素数 w を表す点が描く軌跡を C とする。ただし、 i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1) 軌跡 C を複素数平面上に図示せよ。

(2) $t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_1 とし、 $t = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_2 とする。このとき、軌跡 C 、線分 OP_1 、線分 OP_2 で囲まれる領域を虚軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、 O は複素数平面の原点である。

1

解説

与えられた二次式を w について解くと、軌跡の変換は $w = z + 1/z$ になる。 t の下端も正なので $z \neq 0$ であり、割る操作が使える。 $z = t(1 + i)$ の逆数は共役を掛けて $(1 - i)/(2t)$ と求める。

$w = X + Yi$ とすると、実部と虚部は $X = t + 1/(2t)$ 、 $Y = t - 1/(2t)$ になる。和と差を取れば $X + Y = 2t$ 、 $X - Y = 1/t$ なので、積から $X^2 - Y^2 = 2$ を得る。二つの平方を直接展開するより、和と差の積ならパラメータがすぐに消える。

この双曲線の等式だけでは左右両枝を含んでしまう。 $t > 0$ から $X + Y > 0$ 、 $X - Y > 0$ となり、 $X > 0$ が分かるので、右枝に限られる。また端点を代入して $Y = -1, 1$ を得るが、端点だけでは途中の軌跡が欠けないとはいえない。

そこで $Y'(t) = 1 + 1/(2t^2) > 0$ を確認する。 Y は連続に増加するため、端点間のすべての値を一度ずつ取る。対応する X は正の平方根 $\sqrt{Y^2 + 2}$ に決まり、軌跡は右枝の閉じた一つの弧となる。パラメータ消去と値の実現範囲を両方確かめて、図示する曲線を確定する。

端点の計算では $1/t$ を有理化すると、 $1 + \sqrt{3}$ と $\sqrt{3} - 1$ が入れ替わる関係になる。このため端点は実部が同じで、虚部の符号だけが反対になる。図の弧も実軸に関して対称であり、後の体積積分にこの対称性を使う。

(2) の囲まれた領域は、各高さ Y で、線分の側から双曲線の側までの横の線分になる。上半分の直線式は $X = \sqrt{3}Y$ 、下半分は $X = -\sqrt{3}Y$ なので、左端は $\sqrt{3}|Y|$ で表せる。右端の平方との差は $2 - 2Y^2 \geq 0$ であり、指定区間で正しい左右関係になっている。

虚軸を回転軸とするので、半径は実部の距離である。領域は右半平面にあり、両端とも非負なので、回転断面は外半径 $\sqrt{Y^2 + 2}$ 、内半径 $\sqrt{3}|Y|$ の輪になる。零の高さだけは内半径が零で、円板としてつながる。

断面積では半径を二乗してから引くため、平方根と絶対値がともに消えて多項式になる。高さの端で断面積が零になることは、線分と弧がそこで一致する図とも合う。実軸の上下で対称なので、零から一までを二倍して積分しても同じ体積が得られる。軌跡の正の枝と、回転時の穴の半径を順につなげることが要点である。二つの線分は原点から伸びるので、下半分の式も正の実部を持つ形で使う。虚部が負だからという理由で半径に負の値を入れないよう、絶対値でまとめてから二乗する。

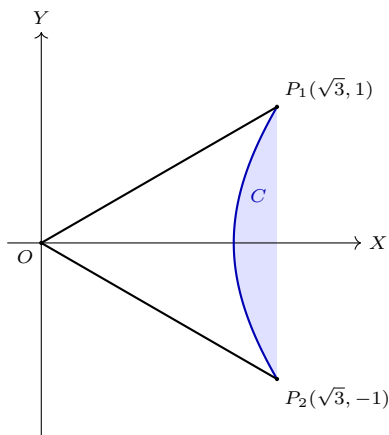
2 答案

(1) 与えられた方程式 $z^2 - wz + 1 = 0$ について、問題の範囲では $t > 0$ なので $z = t + ti \neq 0$ である。したがって両辺を z で割って $w = z + \frac{1}{z}$ を得る。ここで $z = t(1+i)$ だから $\frac{1}{z} = \frac{1}{t(1+i)} = \frac{1-i}{2t}$ である。 $w = X + Yi$ とおくと $X = t + \frac{1}{2t}$, $Y = t - \frac{1}{2t}$ である。よって $X + Y = 2t$, $X - Y = \frac{1}{t}$ となり、これらを掛けて $X^2 - Y^2 = 2$ を得る。

次に端点を求める。 $t = (1 + \sqrt{3})/2$ のとき $2t = 1 + \sqrt{3}$, $\frac{1}{t} = \sqrt{3} - 1$ であるから $X = \frac{(X+Y)+(X-Y)}{2} = \sqrt{3}$, $Y = \frac{(X+Y)-(X-Y)}{2} = 1$ である。したがって $P_1 = (\sqrt{3}, 1)$ である。また, $t = (-1 + \sqrt{3})/2$ のとき $2t = \sqrt{3} - 1$, $\frac{1}{t} = \sqrt{3} + 1$ より $P_2 = (\sqrt{3}, -1)$ である。

さらに $Y'(t) = 1 + 1/(2t^2) > 0$ だから, Y は連続に増加し, 端点の値 $-1, 1$ の間をすべてとる。したがって途中の点が欠けることはない。また, $t > 0$ なので $X + Y = 2t > 0$, $X - Y = 1/t > 0$ であり, 特に $X > 0$ である。したがって軌跡 C は, 双曲線 $X^2 - Y^2 = 2$ の右側の枝のうち, 端点 $P_2 = (\sqrt{3}, -1)$ から $P_1 = (\sqrt{3}, 1)$ までの部分である。すなわち $X = \sqrt{Y^2 + 2}$, $-1 \leq Y \leq 1$ と表される曲線である。図示では, 右に開く双曲線の枝を $Y = -1$ から $Y = 1$ まで切り取った弧として描けばよい。

軌跡と 2 本の線分は次のようになる。網掛け部分が (2) で回転させる領域である。



(2) 求める領域は, $-1 \leq Y \leq 1$ において, 右側が双曲線 $X = \sqrt{Y^2 + 2}$ である。左側の境界は線分 OP_1 と線分 OP_2 である。 $0 \leq Y \leq 1$ では線分 OP_1 上にあり, その式は $X = \sqrt{3}Y$ である。 $-1 \leq Y \leq 0$ では線分 OP_2 上にあり, その式は $X = -\sqrt{3}Y$ である。したがってまとめて $X = \sqrt{3}|Y|$ と書ける。

この領域を虚軸, すなわち Y 軸のまわりに 1 回転する。高さ Y の断面は, 外半径 $R(Y) = \sqrt{Y^2 + 2}$ 内半径 $r(Y) = \sqrt{3}|Y|$ の円環である。したがって体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \{R(Y)^2 - r(Y)^2\} dY \\ &= \pi \int_{-1}^1 \{(Y^2 + 2) - 3Y^2\} dY \\ &= \pi \int_{-1}^1 (2 - 2Y^2) dY \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (1 - Y^2) dY \\ &= 2\pi \left[Y - \frac{Y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$