

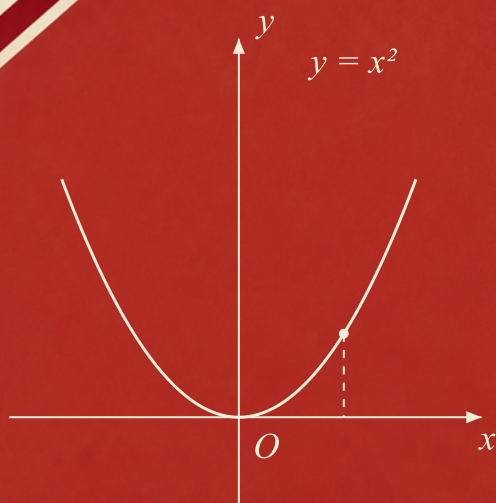
九州大学

理系（後期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

九州大学

理系数学

2017～2026 年度 後期日程

解答編



はじめに

本書は、九州大学の後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	22
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	33
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	43
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	53
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	63
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	73
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	83
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	94
分野索引		104



2026 年度 九州大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・後期日程〉

xy 平面内の点 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(0,3)$ を考える。直線 AB と x 軸および y 軸に接する円を C_1 とする。ただし、円 C_1 の中心の座標は直線 AB に関して点 O と反対側にあるとする。以下の問いに答えよ。

1. 円 C_1 の方程式を求めよ。
2. 円 C_1 と直線 AB の接点を P とする。点 P の座標を求めよ。
3. 円 C_1 上に線分 PQ の長さが 12 となるように点 Q をとる。点 Q の座標を求めよ。
4. a を定数として、放物線 $C_2: y = a(x-s)^2 + t$ は点 P を通るとする。ただし、 s, t はそれぞれ点 Q の x 座標, y 座標を表す。 a の値を求めよ。また、円 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた領域の面積を求めよ。

1

解説

両座標軸に接する円の中心は、半径を $r > 0$ として $(\varepsilon r, \delta r)$ と表せる。二つの符号は独立に正負を取り得るので、最初から第一象限だけを仮定せず、直線との位置条件で絞る。直線 AB は $3x + 4y - 12 = 0$ で、原点を代入した値は負になる。

中心は原点の反対側にあるため、直線式の値は正である。したがって距離の絶対値を正の向きに外し、 $(3\varepsilon + 4\delta)r - 12 = 5r$ とする。右辺の五は法線の長さである。移項後の r の係数が正になるのは両符号が正の場合だけなので、半径と中心を一意に決められる。

(2) の接点は、円の中心から直線へ下ろした垂線の足である。法線ベクトル $\vec{n} = (3, 4)$ に沿って中心から動き、直線式を零にする係数を求める。この係数は中心での直線式の値を $|\vec{n}|^2$ で割ったものとなる。移動の符号を反対にすると直線から離れるので、式への代入で垂足を確認する。

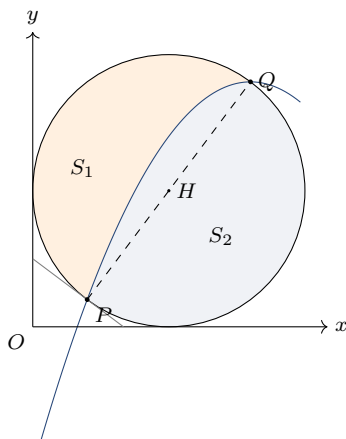
(3) の線分長十二は円の直径に等しい。円周上の二点の距離が最大になる場合は中心を挟む反対側の点なので、 Q は P の対蹠点である。中心を中点として座標を復元すればよく、円の式と距離式を連立する必要はない。

(4) では頂点が Q の放物線に P を代入して、係数 a を決める。面積は円と放物線の交点がほかにもあるかによって形が変わるため、交点を先に確認する。放物線の式を円の式へ入れ、計算を簡単にする一次変数 u に直すと、二交点に対応する因子と、常に正の二次因子に分かれる。

$u^2 - 4u + 9 = (u - 2)^2 + 5 > 0$ なので、円との交点は P, Q だけである。またその間では円の式へ代入した差が負となり、放物線の弧は円内にある。この確認によって、弧が円の外を通して別の領域を作る可能性を除ける。

PQ は直径なので円を等しい二半円に分ける。放物線の弧は直径より上側にあり、その間の面積を E とすれば、弧で分けられた二領域は半円から E を引いたものと、半円に E を加えたものになる。二つの囲まれた領域があるので、それぞれを答える。

E は放物線と直線の差を因数分解して積分する。交点間の長さを d とすると、 $\int_0^d v(d-v) dv = d^3/6$ である。この式を使えば分数の交点を毎回代入せずに計算できる。得た二面積の和は円全体の面積に一致し、どちらも正となる。中心の符号、対蹠点、交点の数、円内の弧という順に形を確定してから面積へ進む。



2 答案

- (1) 半径を $r > 0$, 中心を $(\varepsilon r, \delta r)$ とする。 ε, δ はそれぞれ 1 または -1 である。中心が原点と反対側にある条件と、直線までの距離の条件から

$$(3\varepsilon + 4\delta)r - 12 = 5r.$$

ゆえに $(3\varepsilon + 4\delta - 5)r = 12$. $r > 0$ となるのは $\varepsilon = \delta = 1$ だけで, $r = 6$ となる。したがって

$$C_1: (x-6)^2 + (y-6)^2 = 36.$$

- (2) 中心を $H(6, 6)$ とする。垂足は

$$P = (6, 6) - \frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 - 12}{3^2 + 4^2} (3, 4).$$

よって

$$P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

- (3) 半径が 6 なので, $PQ = 12$ は直径である。 H が線分 PQ の中点となることから

$$Q\left(\frac{48}{5}, \frac{54}{5}\right).$$

- (4) P を C_2 に代入すると

$$\frac{6}{5} = a \left(\frac{12}{5} - \frac{48}{5} \right)^2 + \frac{54}{5}$$

なので

$$a = -\frac{5}{27}.$$

面積を求める前に交点と弧の位置を確認する。放物線上で $u = (5x - 48)/9$ とおくと $x = (9u + 48)/5, y = (54 - 3u^2)/5$ であり,

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 - 36 = \frac{9}{25} u(u+4)(u^2 - 4u + 9).$$

最後の因子は $(u-2)^2 + 5 > 0$ なので, 交点は P, Q だけである。 $-4 < u < 0$ では負となるから, この弧は円の内部にある。

直線 PQ は $y = 4x/3 - 2$ である。放物線との差は

$$-\frac{5}{27} \left(x - \frac{12}{5} \right) \left(x - \frac{48}{5} \right).$$

したがって, 直径と放物線の弧との間の面積は

$$\begin{aligned} E &= \frac{5}{27} \int_{12/5}^{48/5} \left(x - \frac{12}{5} \right) \left(\frac{48}{5} - x \right) dx \\ &= \frac{5}{162} \left(\frac{36}{5} \right)^3 = \frac{288}{25}. \end{aligned}$$

放物線の弧で分けられる二つの領域の面積は, それぞれ

$$S_1 = 18\pi - \frac{288}{25}, \quad S_2 = 18\pi + \frac{288}{25}.$$



2026 年度 九州大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・後期日程〉

以下の問いに答えよ。

1. $x \geq 0$ における任意の x に対して、 $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ が成り立つことを示せ。
2. 自然数 n に対して、実数 a_n を $0 < x < \frac{\pi}{2}$ における x についての方程式 $\sin x = \frac{1}{n}$ の解とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。必要ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を証明なしで用いてよい。
3. $x \geq 0$ における任意の x に対して、 $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ が成り立つことを示せ。
4. 自然数 n に対して、実数 b_n を $x > 0$ における x についての方程式 $x - \sin x = \frac{1}{n}$ の解とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n^3$ を求めよ。必要ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ を証明なしで用いてよい。

1

解説

三角関数の多項式による評価を、差の導関数と零での値から証明する。無限級数の展開を使わず、高校数学の微分と単調性だけで、非負の全範囲に通用する不等式を作る。

(1) の差を $F(x) = \sin x - x + x^3/6$ と置くと、三階導関数は $1 - \cos x \geq 0$ になる。二階導関数の零での値が零なので、非負の範囲では二階導関数も非負になる。同じく一階導関数、関数自身が零で零となることを順に使い、非負性を三段階で下へ戻す。高い階の微分が非負というだけでは元の関数の符号は決まらず、各段階の初期値が必要である。

(2) は極限に必要な $n \geq 2$ を扱う。このとき $1/n$ は零と一の間で、正弦は指定区間で狭義単調増加だから解は一つ存在する。 $n = 1$ では端点 $\pi/2$ にしか解がないが、有限個の初期の扱いは無限遠の極限に影響しない。

$\sin x \leq x$ は差 $x - \sin x$ の導関数が非負で、零で差が零であることから得る。(1) と合わせて $a_n - a_n^3/6 \leq 1/n \leq a_n$ となる。正の a_n で割り、与えられた零への収束を使えば、 $1/(na_n)$ が一に挟まれる。極限が零でないので逆数を取り、求める積の極限へ戻せる。

(3) の差を $G(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - \sin x$ とすると、二階導関数がちょうど (1) の $F(x)$ になる。新しく五階まで調べる必要はなく、前の設問で示した非負性を利用する。零での関数と一階導関数の値を確認して、二段階の単調性から上側の評価を得る。

(4) では $x - \sin x$ の増加を使う。この関数は零で零、無限遠では $x - 1$ 以上なので限りなく大きくなる。導関数が零になる孤立した点があっても、任意の正の幅の区間で導関数の積分は正となり、狭義に増加する。したがって正の右辺に対する解は一つである。

下側と上側の正弦評価を引き算すると、 $b_n^3/6 - b_n^5/120 \leq 1/n \leq b_n^3/6$ となる。今度は三次の量が主な項なので、正の b_n^3 で割る。残る五次の誤差は二次の量になり、零への収束で消える。

はさみうちで逆数側が六分の一に収束し、その極限は正なので元の積は六へ収束する。極限を一度逆数で求めるのは、不等式の中央に既知の $1/n$ があるためである。二つの極限で割る次数が一次と三次に変わることが、それぞれの主な近似項の違いを表している。

2 答案

(1) $F(x) = \sin x - x + x^3/6$ とおく。 $F'''(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $F''(0) = 0$ だから, $x \geq 0$ で $F''(x) \geq 0$ 。同様に $F'(0) = F(0) = 0$ から, 順に $F'(x) \geq 0$, $F(x) \geq 0$ となる。よって求める不等式が成り立つ。

(2) $n \geq 2$ について考える。 $x - \sin x$ の導関数は $1 - \cos x \geq 0$ なので, $x \geq 0$ で $\sin x \leq x$ 。(1) と合わせて

$$a_n - \frac{a_n^3}{6} \leq \frac{1}{n} \leq a_n.$$

$a_n > 0$ で割ると

$$1 - \frac{a_n^2}{6} \leq \frac{1}{na_n} \leq 1.$$

$a_n \rightarrow 0$ より $1/(na_n) \rightarrow 1$ である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1.$$

(3) $G(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - \sin x$ とおく。

$$G''(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = F(x) \geq 0.$$

$G'(0) = G(0) = 0$ だから, $x \geq 0$ で $G'(x) \geq 0$, $G(x) \geq 0$ となる。よって求める不等式が成り立つ。

(4) (1), (3) を $x = b_n$ へ適用すると

$$\frac{b_n^3}{6} - \frac{b_n^5}{120} \leq b_n - \sin b_n = \frac{1}{n} \leq \frac{b_n^3}{6}.$$

$b_n^3 > 0$ で割れば

$$\frac{1}{6} - \frac{b_n^2}{120} \leq \frac{1}{nb_n^3} \leq \frac{1}{6}.$$

$b_n \rightarrow 0$ より $1/(nb_n^3) \rightarrow 1/6$ なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n^3 = 6.$$