大学入試過去問シリーズ

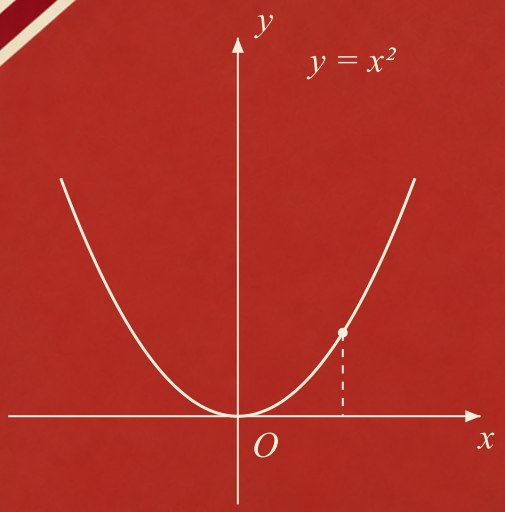
名古屋大学

文系

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

名古屋大学

文系数学

2017～2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、名古屋大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	8
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	16
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	22
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	29
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	35
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	42
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	51
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	58
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	67

分野索引 …… 74

2026 年度 名古屋大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

正の実数 p に対して，xy 平面において $y = x^2 + p$ で定まる放物線を Q とする。a を実数とし，点 $A(a, a^2)$ から Q に引いた 2 本の接線の接点を $B(b, b^2+p)$，$C(c, c^2+p)$ (ただし $b < c$) とする。また $\theta = \angle CAB$ (ただし $0 < \theta < \pi$) とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) b, c を p, a を用いて表せ。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，p を a を用いて表せ。

(3) $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta$ を p, a を用いて表せ。

(4) $\theta \geqq \dfrac{\pi}{3}$ がすべての実数 a に対して成り立つための，p の範囲を求めよ。

解説

接線の傾きから先に角を求めるより、接点を決めて二つのベクトルの内積を使うと、鋭角と鈍角を区別しやすくなります。接点の横座標を u とおくと、接線は $y = 2ux - u^2 + p$ です。これが A を通る条件は

$$(u-a)^2 = p$$

となります。$p > 0$ なので異なる二つの接点があり、$b < c$ という指定が平方根の符号を決めます。

ここでは接点の高さを先に未知数にする必要はありません。放物線上の点なので高さは u^2+p で決まり、微分係数 $2u$ が接線の傾きを与えます。通過条件の計算は

$$a^2 = 2ua - u^2 + p \iff u^2 - 2au + a^2 = p$$

です。よって $b = a-\sqrt{p}, c = a+\sqrt{p}$ となり、二接点が a の左右に一つずつあることも分かります。$p > 0$ は根号を定義するだけでなく、二本の接線を区別するための条件です。

$r = \sqrt{p}$ とおけば、$\overrightarrow{AB} = r(-1, 2(r-a))$、$\overrightarrow{AC} = r(1, 2(a+r))$ です。内積の符号は $4p - 4a^2 - 1$ の符号と一致するため、(2) の直角条件だけでなく、(4) の角の範囲にも利用できます。(3) では内積と長さから $\cos\theta$ を求め、$0 < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$ であることを使って $\tan\theta$ へ進みます。直角以外でも鈍角は起こるので、分母を絶対値にしてはいけません。

この正接への移り方を式で確かめます。$D = 4p - 4a^2 - 1$、$L_1 = \sqrt{1 + 4(r-a)^2}$、$L_2 = \sqrt{1 + 4(r+a)^2}$ とすると、二ベクトルの長さは rL_1, rL_2、内積は pD です。したがって

$$\cos\theta = \frac{D}{L_1 L_2}, \qquad L_1^2 L_2^2 - D^2 = 16p.$$

後式と $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ から正の平方根を選び、$\sin\theta = 4\sqrt{p}/(L_1 L_2)$ を得ます。共通分母を約分すれば正接は $4\sqrt{p}/D$ です。$D < 0$ なら正接も負となり、鈍角という判定と一致します。直角の条件は $D = 0$、すなわち $p = a^2 + 1/4$ です。

(4) で $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$ と置けるのは鋭角の場合です。内積が 0 以下なら $\theta \geqq \pi/2$ となり、求める条件をすでに満たします。鋭角の場合の不等式は

$$4p - 4a^2 - 1 \leqq \frac{4\sqrt{p}}{\sqrt{3}}.$$

左辺が最大になる $a=0$ が最も厳しい条件です。ただし $p \leqq 1/4$ ではすべての a について内積が 0 以下なので、この場合も落とさずに含めます。最後は $\sqrt{p}>0$ を変数として二次不等式を解き、境界 $p=3/4$ で条件が成立することまで確認します。

「すべての a」に対する必要性は $a=0$ を調べて得られ、十分性は $D \leqq 4p-1$ を使って得られます。鋭角では正接が角とともに増えるので、分母 $D>0$ を確認してから不等式を掛けます。$t=\sqrt{p}>0$ へ戻した最後の式は

$$4\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \leqq 0.$$

第二因子は正なので、$0<t \leqq \sqrt{3}/2$、つまり $0<p \leqq 3/4$ です。境界では $a=0$ で $\cos\theta=1/2$ となり、ちょうど $\theta=\pi/3$ を取ります。ほかの a で角がこれより小さくならないことも、同じ内積の上界から確認できます。

2 答案

(1) 放物線 $Q: y=x^2+p$ 上の点を (u, u^2+p) とおく。この点における接線は $y=2u(x-u)+u^2+p=2ux-u^2+p$ である。この接線が点 $A(a, a^2)$ を通るための条件は $a^2=2ua-u^2+p$ であり，整理すると $u^2-2au+a^2=p$ すなわち $(u-a)^2=p$ である。$p>0$ より 2 つの接点が存在し，その x 座標は $u=a-\sqrt{p}$, $\quad u=a+\sqrt{p}$ である。$b<c$ だから $b=a-\sqrt{p}$, $\quad c=a+\sqrt{p}$ である。

(2) 以後 $r=\sqrt{p}$ とおく。(1) より $B=(a-r, (a-r)^2+r^2)$, $\quad C=(a+r, (a+r)^2+r^2)$ である。したがって

$$\overrightarrow{AB}=\left(-r, (a-r)^2+r^2-a^2\right)=(-r, 2r(r-a))=r(-1, 2(r-a))$$

であり，

$$\overrightarrow{AC}=\left(r, (a+r)^2+r^2-a^2\right)=(r, 2r(a+r))=r(1, 2(a+r))$$

である。

内積を計算すると $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=r^2\{-1+4(r-a)(a+r)\}$ である。ここで $(r-a)(a+r)=r^2-a^2=p-a^2$ だから $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=p(4p-4a^2-1)$ となる。$\theta=\pi/2$ のとき，2 つのベクトルは垂直であるから，内積が 0 である。$p>0$ より $4p-4a^2-1=0$ であり，$p=a^2+\frac{1}{4}$ を得る。

(3) $r=\sqrt{p}$ とおき、

$$L_1=\sqrt{1+4(r-a)^2}, \qquad L_2=\sqrt{1+4(r+a)^2}$$

とする。内積とベクトルの長さより

$$\cos\theta=\frac{4p-4a^2-1}{L_1L_2}.$$

展開して整理すると

$$L_1^2L_2^2-(4p-4a^2-1)^2=16p$$

である。$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ だから、

$$\sin\theta=\frac{4\sqrt{p}}{L_1L_2}.$$

よって $\theta \neq \pi/2$ のとき

$$\tan\theta=\frac{4\sqrt{p}}{4p-4a^2-1}.$$

(4) $D = 4p - 4a^2 - 1$ とおく。$D \leqq 0$ なら $\theta \geqq \pi/2$ なので条件を満たす。$D > 0$ なら θ は鋭角であり、(3) より $\theta \geqq \pi/3$ であることは

$$D \leqq \frac{4\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$$

と同値である。

$p \leqq 1/4$ なら常に $D \leqq 0$ となる。$p > 1/4$ なら $a = 0$ のときも鋭角であり、D は $a = 0$ で最大になる。したがって、両方の場合を合わせた必要十分条件は

$$4p - 1 \leqq \frac{4\sqrt{p}}{\sqrt{3}}.$$

$t = \sqrt{p} > 0$ とおくと

$$4t^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}t - 1 = 4\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \leqq 0.$$

ゆえに求める範囲は

$$0 < p \leqq \frac{3}{4}.$$

この範囲では、$D > 0$ の場合も上の不等式が成立し、$D \leqq 0$ の場合も条件を満たす。

2 2026 年度 名古屋大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

整数の組 (a, b, c) に対して，次の条件 (*) を考える。

(*) a, b, c は 1 以上の整数であり，a と b の最大公約数，a と c の最大公約数，b と c の最大公約数はそれぞれ 1 である。

以下の問いに答えよ。ただし，組 (a, b, c) と (d, e, f) は $a = d$, $b = e$, $c = f$ のとき，かつこのときに限り等しい。

(1) 条件 (*) かつ $abc = 120$ をみたす組 (a, b, c) のうちで，$a \leqq b \leqq c$ をみたすものをすべて求めよ。

(2) 条件 (*) かつ $abc = 120$ をみたす組 (a, b, c) の個数を求めよ。

(3) N を 2 以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件 (*) かつ $abc = N!$ をみたす組 (a, b, c) の個数を m を用いて表せ。

1 解説

積が決まっているので、三つの数を一つずつ探すより、素因数をどこに入れられるかを考えます。たとえば $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ に含まれる 2 が a と b の両方に現れれば、二つの最大公約数は 1 になりません。したがって 2^3 は分割できず、a, b, c のどれか一つにまとめて入ります。3 と 5 も同様です。逆に、このように各素数の累乗を一つの場所にまとめれば、異なる二つの数に共通の素因数はなく、条件 (*) を満たします。

例えば 8 を 2×4 に分けて別の数へ入れると、どちらも 2 で割り切れるため失敗します。3 や 5 についても、同じ素数を二つの場所へ入れてはいけません。一方、別の素数の因子を同じ場所へまとめることは許されます。この違いにより、整数 a, b, c を大小順に試す問題が、三つのまとまり $8, 3, 5$ を配る問題へ変わります。何も配られない場所が 1 であることは、三数が正の整数という条件にも合っています。

(1) では三つの因子 $8, 3, 5$ の入れ方を、使う場所の数で分けます。一か所なら $(1, 1, 120)$、二か所なら一つだけ入る因子が $3, 5, 8$ のいずれか、三か所なら $(3, 5, 8)$ です。積が空の場所には 1 を入れます。この分け方なら大小順の五組を漏れなく挙げられます。

二か所を使うときは、因子を一つだけ受け取る場所に注目します。その因子が 3 なら残りは 40、5 なら 24、8 なら 15 です。三因子を二か所へ配る以上、片方が一因子、他方が二因子となるので、これ以外の型はありません。したがって一覧は

$$(1, 1, 120),\ (1, 3, 40),\ (1, 5, 24),$$

$$(1, 8, 15),\ (3, 5, 8)$$

となります。大小順へ並べ直しているため、どの場所を空にしたかをさらに数える必要はありません。各組の積が 120 で、三つの最大公約数がそれぞれ 1 になることも確認できます。

(2) では順序が区別されるので、(1) の五組を一律に $3!$ 倍する方法は使えません。$(1, 1, 120)$ には重複があるためです。各因子の行き先を直接選べば、それぞれ 3 通りで 3^3 通りとなります。(3) も同じ数え方です。$N!$ に現れる素数は N 以下の素数だけであり、その m 個の累乗部分の行き先を独立に選びます。異なる割り当てから同じ組が生じないことは、素因数分解の一意性から分かります。

順序付きの 27 通りは、五組を並べ替えても確かめられます。$(1, 1, 120)$ は 1 の二つを交換しても変わらないので 3 通り、他の四組はすべての値が異なるので各 6 通りであり、$3 + 4 \cdot 6 = 27$ です。直接割り当てる方法では、この重複の違いを別に処理しなくて済みます。

一般の $N!$ では、N 以下の各素数は積の中の自分自身を因子に持つので必ず現れ、N より大きい素数は現れません。素数一つごとに累乗部分全体の行き先が 3 通りあり、ある素数の行き先は別の素数の選び方を制限しません。逆に完成した三数を素因数分解すれば、各行き先を読み戻せます。よって積の条件と互いに素の条件を同時に満たす組は、過不足なく 3^m 通りです。

2　答案

(1) まず $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ である。条件 $(*)$ より，a, b, c のどの 2 つも共通の素因数を持たない。したがって，2^3, 3, 5 のそれぞれは，a, b, c のうち 1 つだけに丸ごと入る。

つまり，3 つの数 8,　3,　5 を，a, b, c の 3 つの場所へ重複なく割り振ることを考えればよい。大小順 $a \leqq b \leqq c$ で並べた組を列挙する。

3 つの因子をすべて同じ数に入れると $(1, 1, 120)$ である。2 つを同じ数に入れ，残り 1 つを別の数に入れると $(1, 3, 40)$,　$(1, 5, 24)$,　$(1, 8, 15)$ である。3 つをすべて別々に入れると $(3, 5, 8)$ である。

したがって求める組は $(1, 1, 120), (1, 3, 40), (1, 5, 24), (1, 8, 15), (3, 5, 8)$ である。

(2) 順序を区別して数える。2^3, 3, 5 のそれぞれについて，入れる先は a,　b,　c の 3 通りである。各素数ブロックの割り振りは独立であり，そのように割り振れば必ず条件 $(*)$ を満たす。したがって個数は $3^3 = 27$ である。

(3) $N!$ に現れる素数は，問題文より m 個である。それらを $p_1, p_2, \ldots, p_m$ とし，$N!$ における p_i の指数を e_i とする。このとき $N! = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m}$ である。

条件 $(*)$ を満たすためには，各 $p_i^{e_i}$ を a, b, c のうちただ 1 つに入れなければならない。逆に，各 $p_i^{e_i}$ を a, b, c のどれか 1 つへ割り振れば，異なる 2 つの数が同じ素因数を共有することはないので，条件 $(*)$ を満たす。

各素数について割り振り先は 3 通りで，素数ごとに独立だから，求める個数は 3^m である。

3 2026 年度 名古屋大学・文系 第 3 問

【数学（文系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

整数の組 (a, b, c) に対して，次の条件 (∗) を考える。

(∗) a, b, c は 1 以上の整数であり，a と b の最大公約数，a と c の最大公約数，b と c の最大公約数はそれぞれ 1 である。

以下の問いに答えよ。ただし，組 (a, b, c) と (d, e, f) は $a = d, b = e, c = f$ のとき，かつこのときに限り等しい。

(1) 条件 (∗) かつ $abc = 120$ をみたす組 (a, b, c) のうちで，$a \leqq b \leqq c$ をみたすものをすべて求めよ。

(2) N を 2 以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件 (∗) かつ $abc = N!$ をみたす組 (a, b, c) の個数を m を用いて表せ。

(3) N を 2 以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件 (∗) かつ $abc = N!$ をみたす組 (a, b, c) のうちで，$a \leqq b \leqq c$ をみたすものの個数を m を用いて表せ。

1 解説

条件 (∗) は、同じ素数が三つの数のうち二つにまたがって現れてはならない、という条件です。積を素因数分解し、各素数の累乗部分を一つの数へまとめて割り当てます。120 なら、割り当てるものは $8, 3, 5$ の三つです。使う場所が一つ、二つ、三つの場合に分ければ、(1) の大小順の五組を漏れなく挙げられます。何も入らない場所の値は 1 です。

三因子を使う場所が二か所なら、一方だけに入る因子を 3、5、8 と選ぶ三場合に尽きます。その結果を大小順に直すと、全体は $(1, 1, 120), (1, 3, 40), (1, 5, 24), (1, 8, 15), (3, 5, 8)$ です。8 を二つの場所へ分割すれば 2 が共通因子となるので、そのような配り方は入りません。反対に別の素数の因子を同じ数へまとめても、他の数とは共通因子を作りません。この両向きの確認が、整数の組と因子の配り方の対応を支えます。

(2) では $N!$ を

$$N! = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_m^{e_m}$$

と表します。各 $q_i^{e_i}$ を a, b, c のどこに入れるかは 3 通りで、素数ごとに独立に決められます。この割り当てからできる組はすべて条件を満たし、条件を満たす組からは割り当てを一意に読み戻せるため、3^m 通りです。

ここで q_i は互いに異なる素数、e_i は正の整数です。三数の積が $N!$ である以上、q_i の指数の総和は e_i でなければなりません。互いに素の条件は、その正の指数を一か所へ集めることと同値です。指数そのものを 0 から e_i まで配分する問題ではないため、各素数につき選択は常に 3 通りです。$N \geqq 2$ なので $m \geqq 1$ であり、少なくとも一つの場所には 1 より大きい数が入ります。

(3) で大小順の組へ直すとき、単に 3^m を 6 で割ると、等しい数を含む組を誤って数えます。二つが等しい場合、その共通の値と自身との最大公約数が 1 なので、その値は 1 に限られます。$N! > 1$ より三つすべてが 1 となることはなく、例外は $(1, 1, N!)$ だけです。この一組は順序付きでは 3 通り、残りの組はすべて 6 通りに対応します。求める個数を T として $3^m = 3 + 6(T - 1)$ と数えると、例外の重複を過不足なく処理できます。

等しい二数を d とすると、その最大公約数は d 自身です。これが 1 という条件から $d = 1$ と確定します。そのため、二数が等しい場合は三通りの $(1, 1, N!), (1, N!, 1), (N!, 1, 1)$ だけで、三数が等しい場合はありません。まずこの三通りを除き、残りを 6 通りずつまとめると

$$T = 1 + \frac{3^m - 3}{6} = \frac{3^m + 3}{6}$$

です。大小順の例外一組を最後に戻すので、単に 6 で割る方法との差も明確になります。例えば $N=3$ では $m=2$ で、大小順の組は $(1,1,6)$ と $(1,2,3)$ の二つです。式も 2 を与え、等しい数の例外と三数が異なる通常の場合を同時に確認できます。$N=2$、すなわち $m=1$ でも答えが 1 になることを確かめておくと安心です。

2　答案

(1) $120=2^3\cdot 3\cdot 5$ である。条件 $(*)$ より，a,b,c のどの 2 つも共通の素因数を持たない。したがって 2^3，3，5 は，それぞれ a,b,c のうち 1 つだけに丸ごと入る。

3 つの素数ブロックを $8,\quad 3,\quad 5$ と見て，大小順 $a\leqq b\leqq c$ で並べた組を列挙する。3 つをすべて同じ数に入れると $(1,1,120)$ である。2 つを同じ数に入れると $(1,3,40),\quad (1,5,24),\quad (1,8,15)$ である。3 つを別々に入れると $(3,5,8)$ である。

したがって求める組は $(1,1,120),(1,3,40),(1,5,24),(1,8,15),(3,5,8)$ である。

(2) $N!$ に現れる素数は m 個である。それぞれの素数 q について，$N!$ に含まれる q の累乗部分を a,b,c のどれか 1 つへ割り振る必要があり，またそのようにすれば条件 $(*)$ を満たす。

各素数の累乗部分について割り振り先は 3 通りであり，m 個の素数について独立に選べる。したがって条件 $(*)$ かつ $abc=N!$ を満たす順序つきの組の個数は 3^m である。

(3) (2) で数えた 3^m 通りは，(a,b,c) の順序を区別している。ここから $a\leqq b\leqq c$ を満たす組の個数を求める。

条件 $(*)$ のもとで，もし 2 つの数が等しいなら，その 2 つは互いに素である同じ正整数である。したがってその共通の値は 1 でなければならない。$abc=N!>1$ なので，3 つすべてが等しいことはなく，2 つが等しい場合は $(1,1,N!)$ を並べ替えた場合だけである。

大小順にした組のうち，$(1,1,N!)$ は順序つきでは $(1,1,N!),\quad (1,N!,1),\quad (N!,1,1)$ の 3 通りに対応する。それ以外の大小順の組は 3 つの値がすべて異なるので，順序つきでは 6 通りに対応する。

求める個数を T とする。すると，大小順の組のうち 1 個は $(1,1,N!)$ であり，残り $T-1$ 個はそれぞれ 6 通りの順序つき組をもつ。よって $3^m=3+6(T-1)$ である。これを解くと $T=\frac{3^m+3}{6}$ である。したがって求める個数は $\frac{3^m+3}{6}$ である。

2025 年度 名古屋大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2025 年度・前期日程〉

実数 b, c に対し，放物線 $y=f(x)=x^2+bx+c$ が 2 点 $(p,\,0)$，$(q,\,0)$ を通ると仮定する (ただし $p<q$)。また，条件 $0<t\leqq 1$ をみたす実数 t に対し実数 r, s を次のように定める。

$$r=\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q,\quad s=\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q$$

以下の問に答えよ。

(1) $q-s$, $r-p$, $s+r$, $s-r$ のそれぞれを b, c, t を用いて表せ。

(2) sr および s^2+r^2 を b, c, t を用いて表せ。

(3) 放物線 $y=f(x)$，直線 $x=r$, $x=s$ および x 軸が囲む領域の面積を b, c, t を用いて表せ。

解説

二つの根 p, q を解の公式で個別に求める必要はありません。求める量が和・差・積なので、

$$p+q=-b,\qquad pq=c,\qquad q-p=\sqrt{b^2-4c}$$

を使います。$p<q$ から判別式は正であり、差の平方根は正の方を選びます。r, s の定義を加減すると、$s+r=p+q$、$s-r=t(q-p)$ がすぐに得られます。これを使えば、(2) も $4sr=(s+r)^2-(s-r)^2$ と $s^2+r^2=(s+r)^2-2sr$ で整理できます。

差の平方を展開すると $(s-r)^2=s^2-2sr+r^2$、和の平方は $(s+r)^2=s^2+2sr+r^2$ なので、両式を引けば $4sr$ が残ります。$D=b^2-4c>0$ とおけば、求める二式は

$$sr=\frac{b^2-t^2D}{4},\qquad s^2+r^2=\frac{b^2+t^2D}{2}.$$

また定義を直接引くと $q-s=r-p=(1-t)\sqrt{D}/2$ です。同じ距離だけ根の両端から内側へ進んでいるため、区間の中心は変わらず、幅だけが t 倍になると理解できます。二根を解の公式で書いてから掛け合わせるより、根号の交差項を扱わずに済みます。

(3) では積分の前に、$p\leqq r<s\leqq q$ であることを確かめます。$0<t\leqq 1$ という条件がこの順序を保証しているので、区間 $[r, s]$ では $f(x)\leqq 0$ です。求める面積は $\int_r^s -f(x)\,dx$ となり、絶対値を場合分けする必要はありません。

この順序は $r-p=q-s=(1-t)(q-p)/2\geqq 0$ と $s-r=t(q-p)>0$ から式だけでも確認できます。$t=1$ なら両端は元の根に一致し、$0<t<1$ なら二根の内部です。$f(x)=(x-p)(x-q)$ では、この区間で一方の因子が非負、他方が非正になるので、上下は x 軸が上、放物線が下です。面積の符号は、この根の順序を決めてから選びます。

さらに、根の中点を $u=(p+q)/2$、半分の間隔を $d=(q-p)/2$ とおくと、$r=u-td$、$s=u+td$ です。$x=u+v$ と平行移動すると $f(x)=v^2-d^2$ になり、積分区間も $[-td, td]$ と対称になります。偶関数の積分として $2\int_0^{td}(d^2-v^2)\,dv$ を計算すれば、展開が短く済みます。最後に d を判別式で表します。

対称積分の計算を一段ずつ書くと

$$\begin{aligned}S&=2\left[d^2v-\frac{v^3}{3}\right]_0^{td}\\&=2d^3\left(t-\frac{t^3}{3}\right)=\frac{D\sqrt{D}}{4}\left(t-\frac{t^3}{3}\right).\end{aligned}$$