大学入試過去問シリーズ

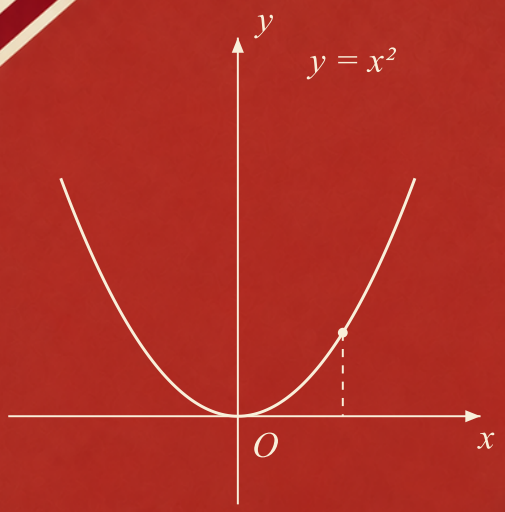
名古屋大学

理系

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

名古屋大学

理系数学

2017〜2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、名古屋大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	10
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	20
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	29
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	37
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	46
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	55
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	65
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	74
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	84

分野索引 …… 94

2026 年度 名古屋大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

点 O を原点とする xy 平面において，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分を C とし，C 上の 2 点 $A\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$　(ただし $0<a<1,\ a<b$) を考える。$\theta=\angle BOA$ とおき，2 直線 OA, OB と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) S を a, b を用いて表せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，b を a を用いて表せ。

(3) 2 点 A, B が C 上を $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ をみたしながら動くとき，S の最小値を与える a の値を求めよ。

解説

曲線と原点からの二直線で囲まれる領域は、横座標 a で上側の境界が変わります。$0\leqq x\leqq a$ では二直線の間、$a\leqq x\leqq b$ では曲線と直線 OB の間です。曲線だけを a から b まで積分すると、原点近くの部分と直線の下の部分を取り違えます。二つの積分を足すと、直線が与える項が相殺して $S=\log(b/a)$ となります。

直線は $OA: y=x/a^2$、$OB: y=x/b^2$ です。$x<a$ では $x/a^2<1/x$、$x>a$ では逆となるため、上の境界は A で直線から曲線へ変わります。計算は

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2b^2}\right)+\left(\log\frac{b}{a}-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2b^2}\right).$$

第一の括弧は二直線の間、第二は双曲線と下の直線の間の面積です。定数項と直線に由来する項が消えるので、横座標の比だけが残ります。$b>a$ なら対数も正となり、面積の符号が一致します。

(2) は傾き $m_A=1/a^2$、$m_B=1/b^2$ を使います。二直線は第一象限にあり、$m_A>m_B>0$ なので、そのなす角は鋭角です。各直線の方向角の差に正接の減法公式を使い、

$$\tan\theta=\frac{b^2-a^2}{1+a^2b^2}$$

と表せます。$\theta=\pi/4$ から b^2 について解き、$0<a<1$ より分母が正であることと、$b>0$ であることを使って平方根を選びます。得られた b は $b>1>a$ となるので、元の順序条件も満たします。

正接を 1 とする式から $(1-a^2)b^2=1+a^2$ です。$a<1$ が分母の正値を保証し、$b^2-1=2a^2/(1-a^2)>0$ なので $b>1$ です。逆にこの正の平方根で決めた b を正接の式へ代入すれば 1 となり、角は鋭角なので $\theta=\pi/4$ に確定します。正接の等式だけで角を決めるときは、角の取り得る範囲の確認も必要です。面積を最小にする段階では、この b の式を代入して a だけの関数にします。

(3) は a の四乗を含む微分を避け、$u=a^2$ と置きます。$S=\frac{1}{2}\log\{(u+1)/(u(1-u))\}$ で、$0<u<1$ です。対数が増加するので中の分数だけを最小化できます。導関数の分母は正であり、分子 u^2+2u-1 の符号から $u=\sqrt{2}-1$ で最小となります。開区間の端点は含まれませんが、全区間で減少・増加が確認できるため、この内点が全体の最小です。最後に $a>0$ から正の平方根を取ります。

分数の微分の分子は $u(1-u)-(u+1)(1-2u)=u^2+2u-1=(u+1)^2-2$ です。$0<u<1$ では根は $\sqrt{2}-1$ だけで、根の左で負、右で正となります。よって $a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ です。面積には正の係数 $1/2$ と増加する対数を掛けているだけなので、最小点は変わりません。端へ近づくと分母 $u(1-u)$ が 0 となって分数は大きくなることも、内部に唯一の最小点がある結論と整合します。

2 答案

(1) 直線 OA, OB の方程式はそれぞれ

$$y = \frac{x}{a^2}, \qquad y = \frac{x}{b^2}$$

である。$0 < a < b$ より $1/a^2 > 1/b^2$ である。また，$0 \leqq x \leqq a$ では 2 直線の間が領域に入り，$a \leqq x \leqq b$ では曲線 $y = 1/x$ と直線 OB の間が領域に入る。したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left(\frac{x}{a^2} - \frac{x}{b^2}\right) dx + \int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{b^2}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2b^2}\right) + \left(\log\frac{b}{a} - \frac{b^2 - a^2}{2b^2}\right) \\ &= \log\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

よって $S = \log\dfrac{b}{a}$ である。

(2) 直線 OA の傾きは $\frac{1/a}{a} = \frac{1}{a^2}$ であり，直線 OB の傾きは $\frac{1/b}{b} = \frac{1}{b^2}$ である。$a < b$ なので $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$ である。2 直線のなす角 θ について

$$\tan\theta = \frac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}{1 + \dfrac{1}{a^2 b^2}} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2 + 1}$$

である。$\theta = \pi/4$ なので $\tan\theta = 1$ である。よって $b^2 - a^2 = a^2 b^2 + 1$ となる。これを b^2 について解くと $b^2(1 - a^2) = a^2 + 1$ である。$0 < a < 1$ より $1 - a^2 > 0$ だから $b^2 = \frac{a^2+1}{1-a^2}$ である。$b > 0$ より $b = \sqrt{\frac{a^2+1}{1-a^2}}$ である。

(3) (2) の条件のもとで $S = \log\frac{b}{a}$ である。$x = a^2$ とおくと，$0 < a < 1$ より $0 < x < 1$ である。また $\frac{b^2}{a^2} = \frac{x+1}{x(1-x)}$ だから $S = \frac{1}{2}\log\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x(1-x)}$ である。対数関数は単調増加なので，$h(x) = \frac{x+1}{x(1-x)}$ を最小にすればよい。

微分すると

$$h'(x) = \frac{x(1-x) - (x+1)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2(1-x)^2}$$

である。分母は $0 < x < 1$ で正なので，符号は $x^2 + 2x - 1$ で決まる。この 2 次式の $0 < x < 1$ にある根は $x = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$ である。したがって $h'(x) < 0$ から $h'(x) > 0$ に変わるので，$h(x)$ は $x = \sqrt{2} - 1$ で最小となる。

ゆえに $a^2 = \sqrt{2} - 1$ であり，$a > 0$ だから，S の最小値を与える a は $a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ である。

2026 年度 名古屋大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

a を実数とする。空間内の 3 点 $A(2,\,1,\,3)$，$B(a+2,\,3,\,4)$，$C(1,\,0,\,0)$ を含む平面を H とし，2 点 $D(-1,\,2,\,1)$，$E(-3,\,1,\,0)$ を通る直線を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 平面 H が直線 DE と共有点をもつための，a の条件を求めよ。

(2) 平面 H が線分 DE(両端を含む) と共有点をもつための，a の条件を求めよ。

解説

平面と直線の共有点は、直線上の点が平面の方程式を満たすかで調べます。まず $\overrightarrow{AB}=(a,2,1)$、$\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-3)$ の両方に垂直な $\vec{n}$ を求めます。二つの内積を 0 とする連立式を解けば、$\vec{n}=(-5,3a-1,2-a)$ です。第一成分が常に -5 なので零ベクトルにならず、三点が作る平面の法線として使えます。

法線の成分を (u,v,w) と置けば $au+2v+w=0$、$u+v+3w=0$ という二式です。$u=-5, w=2-a$ を取ると第二式から $v=3a-1$ となり、第一式にも代入して 0 を確かめられます。外積を使わなくても、二方向に垂直な条件だけで求められます。また $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は第二成分と第三成分の比が異なり、平行ではありません。三点は一直線に並ばず、法線で表した平面は問題の H として一つに定まります。

直線 DE 上の点 X を $\overrightarrow{DX}=s\overrightarrow{DE}$ と表すと、座標は $(-1-2s,2-s,1-s)$ です。平面上にある条件 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AX}=0$ は

$$(9-2a)s+5(a+2)=0$$

という一次方程式になります。(1) で係数が 0 になる $a=9/2$ では、定数項も 0 かどうかを必ず調べます。両方 0 なら直線全体が平面に入りますが、この問題では定数項が 0 でないため平行で共有点がありません。

計算には $\overrightarrow{AX}=(-3-2s,1-s,-2-s)$ を使います。法線との内積は

$$(-5)(-3-2s)+(3a-1)(1-s)+(2-a)(-2-s)$$

で、定数項が $5(a+2)$、s の係数が $9-2a$ です。$a=9/2$ なら前者は $65/2$ となり、s を変えても 0 になりません。それ以外は係数が 0 でない一次方程式なので共有点がただ一つあります。この段階では s が 0 と 1 の外にあっても直線上の点として許されます。

(2) の線分は $0\leqq s\leqq 1$ に対応します。分母 $2a-9$ の符号を分けて、この条件を解きます。$s=0$ と $s=1$ は両端 D, E なので、境界を含めて答えます。

別解では、平面の式の左辺を端点で計算します。値は D で $5(a+2)$、E で $3a+19$ です。線分上ではその値が一次的に変化するので、0 を含むことは二つの値の積が 0 以下であることと同値です。これなら分数不等式を使わずに同じ範囲を求められます。

分数で解く場合、$s\geqq 0$ から $a\leqq -2$ または $a>9/2$ です。前者では分母が負なので、$s\leqq 1$ を掛け戻すと $5(a+2)\geqq 2a-9$、すなわち $a\geqq -19/3$ となります。後者では $a\leqq -19/3$ となって両立しません。従って $-19/3\leqq a\leqq -2$ です。端点での値の積 $5(a+2)(3a+19)$ もこの二根の間で 0 以下となります。$a=-2$ では D、$a=-19/3$ では E が平面上なので、両端を含める指定とも一致します。

2 答案

(1) $\overrightarrow{AB}=(a,2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-3)$ である。これらに垂直なベクトルとして $\vec{n}=(-5,3a-1,2-a)$ を取ると、

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

が直接確かめられる。$\vec{n}\neq\vec{0}$ なので、平面の方程式は $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AX}=0$ である。

直線 DE 上の点を $\overrightarrow{DX}=s\overrightarrow{DE}$ と表すと、$X(-1-2s,2-s,1-s)$ である。この点が平面上にある条件は

$$(9-2a)s+5(a+2)=0.$$

$a\neq 9/2$ なら s について一つの解があり、$a=9/2$ なら定数項 $65/2$ が 0 でないため解はない。したがって条件は $a\neq 9/2$ である。

(2) 共有点の s は

$$s=\frac{5(a+2)}{2a-9}.$$

$s\geqq 0$ より $a\leqq -2$ または $a>9/2$ である。$a\leqq -2$ では分母が負なので、$s\leqq 1$ は $5(a+2)\geqq 2a-9$、すなわち $a\geqq -19/3$ である。$a>9/2$ では $s\leqq 1$ から $a\leqq -19/3$ が必要となり、両立しない。よって条件は

$$-\frac{19}{3}\leqq a\leqq -2.$$

両端ではそれぞれ $s=1,0$ となり、線分の端点で共有点を持つ。

3 別解・背景

平面の式の左辺を $L(X)=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AX}$ とすると、$L(D)=5(a+2)$, $L(E)=3a+19$ である。$\overrightarrow{DX}=s\overrightarrow{DE}$、$0\leqq s\leqq 1$ で

$$L(X)=(1-s)L(D)+sL(E)$$

だから、線分上に $L(X)=0$ となる点が存在する条件は $L(D)L(E)\leqq 0$ である。これを解いて $-19/3\leqq a\leqq -2$ を得る。

3 2026 年度 名古屋大学・理系 第 3 問

【数学（理系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

整数の組 (a, b, c) に対して，次の条件 $(*)$ を考える。

$(*)$ a, b, c は 1 以上の整数であり，a と b の最大公約数，a と c の最大公約数，b と c の最大公約数はそれぞれ 1 である。

以下の問いに答えよ。ただし，組 (a, b, c) と (d, e, f) は $a = d, b = e, c = f$ のとき，かつこのときに限り等しい。

(1) 条件 $(*)$ かつ $abc = 120$ をみたす組 (a, b, c) のうちで，$a \leqq b \leqq c$ をみたすものをすべて求めよ。

(2) N を 2 以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件 $(*)$ かつ $abc = N!$ をみたす組 (a, b, c) の個数を m を用いて表せ。

(3) N を 2 以上の整数とし，N 以下の素数の個数を m とする。条件 $(*)$ かつ $abc = N!$ をみたす組 (a, b, c) のうちで，$a \leqq b \leqq c$ をみたすものの個数を m を用いて表せ。

1 解説

条件 $(*)$ は、同じ素数が三つの数のうち二つにまたがって現れてはならない、という条件です。積を素因数分解し、各素数の累乗部分を一つの数へまとめて割り当てます。120 なら、割り当てるものは $8, 3, 5$ の三つです。使う場所が一つ、二つ、三つの場合に分ければ、(1) の大小順の五組を漏れなく挙げられます。何も入らない場所の値は 1 です。

三因子を使う場所が二か所なら、一方だけに入る因子を 3、5、8 と選ぶ三場合に尽きます。その結果を大小順に直すと、全体は $(1, 1, 120), (1, 3, 40), (1, 5, 24), (1, 8, 15), (3, 5, 8)$ です。8 を二つの場所へ分割すれば 2 が共通因子となるので、そのような配り方は入りません。反対に別の素数の因子を同じ数へまとめても、他の数とは共通因子を作りません。この両向きの確認が、整数の組と因子の配り方の対応を支えます。

(2) では $N!$ を

$$N! = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_m^{e_m}$$

と表します。各 $q_i^{e_i}$ を a, b, c のどこに入れるかは 3 通りで、素数ごとに独立に決められます。この割り当てからできる組はすべて条件を満たし、条件を満たす組からは割り当てを一意に読み戻せるため、3^m 通りです。

ここで q_i は互いに異なる素数、e_i は正の整数です。三数の積が $N!$ である以上、q_i の指数の総和は e_i でなければなりません。互いに素の条件は、その正の指数を一か所へ集めることと同値です。指数そのものを 0 から e_i まで配分する問題ではないため、各素数につき選択は常に 3 通りです。$N \geqq 2$ なので $m \geqq 1$ であり、少なくとも一つの場所には 1 より大きい数が入ります。

(3) で大小順の組へ直すとき、単に 3^m を 6 で割ると、等しい数を含む組を誤って数えます。二つが等しい場合、その共通の値と自身との最大公約数が 1 なので、その値は 1 に限られます。$N! > 1$ より三つすべてが 1 となることはなく、例外は $(1, 1, N!)$ だけです。この一組は順序付きでは 3 通り、残りの組はすべて 6 通りに対応します。求める個数を T として $3^m = 3 + 6(T - 1)$ と数えると、例外の重複を過不足なく処理できます。

等しい二数を d とすると、その最大公約数は d 自身です。これが 1 という条件から $d = 1$ と確定します。そのため、二数が等しい場合は三通りの $(1, 1, N!), (1, N!, 1), (N!, 1, 1)$ だけで、三数が等しい場合はありません。まずこの三通りを除き、残りを 6 通りずつまとめると

$$T = 1 + \frac{3^m - 3}{6} = \frac{3^m + 3}{6}$$

です。大小順の例外一組を最後に戻すので、単に 6 で割る方法との差も明確になります。例えば $N=3$ では $m=2$ で、大小順の組は $(1,1,6)$ と $(1,2,3)$ の二つです。式も 2 を与え、等しい数の例外と三数が異なる通常の場合を同時に確認できます。$N=2$、すなわち $m=1$ でも答えが 1 になることを確かめておくと安心です。

2 答案

(1) $120=2^3\cdot 3\cdot 5$ である。条件 $(*)$ より，a,b,c のどの 2 つも共通の素因数を持たない。したがって 2^3，3，5 は，それぞれ a,b,c のうち 1 つだけに丸ごと入る。

3 つの素数ブロックを $8,\quad 3,\quad 5$ と見て，大小順 $a\leqq b\leqq c$ で並べた組を列挙する。3 つをすべて同じ数に入れると $(1,1,120)$ である。2 つを同じ数に入れると $(1,3,40),\quad (1,5,24),\quad (1,8,15)$ である。3 つを別々に入れると $(3,5,8)$ である。

したがって求める組は $(1,1,120),(1,3,40),(1,5,24),(1,8,15),(3,5,8)$ である。

(2) $N!$ に現れる素数は m 個である。それぞれの素数 q について，$N!$ に含まれる q の累乗部分を a,b,c のどれか 1 つへ割り振る必要があり，またそのようにすれば条件 $(*)$ を満たす。

各素数の累乗部分について割り振り先は 3 通りであり，m 個の素数について独立に選べる。したがって条件 $(*)$ かつ $abc=N!$ を満たす順序つきの組の個数は 3^m である。

(3) (2) で数えた 3^m 通りは，(a,b,c) の順序を区別している。ここから $a\leqq b\leqq c$ を満たす組の個数を求める。

条件 $(*)$ のもとで，もし 2 つの数が等しいなら，その 2 つは互いに素である同じ正整数である。したがってその共通の値は 1 でなければならない。$abc=N!>1$ なので，3 つすべてが等しいことはなく，2 つが等しい場合は $(1,1,N!)$ を並べ替えた場合だけである。

大小順にした組のうち，$(1,1,N!)$ は順序つきでは $(1,1,N!),\quad (1,N!,1),\quad (N!,1,1)$ の 3 通りに対応する。それ以外の大小順の組は 3 つの値がすべて異なるので，順序つきでは 6 通りに対応する。

求める個数を T とする。すると，大小順の組のうち 1 個は $(1,1,N!)$ であり，残り $T-1$ 個はそれぞれ 6 通りの順序つき組をもつ。よって $3^m=3+6(T-1)$ である。これを解くと $T=\frac{3^m+3}{6}$ である。したがって求める個数は $\frac{3^m+3}{6}$ である。

2026 年度 名古屋大学・理系 第 4 問

【数学（理系）第 4 問】〈2026 年度・前期日程〉

xy 平面上を次の規則 (i)，(ii) に従って移動する点 A を考える。

(i) 時刻 0 で点 A は原点にある。

(ii) ある時刻において点 A が (x, y) にあるとき，時刻が 1 増えると点 A は 3 点 $(x+1, y)$, $(x+1, y+1)$, $(x, y+1)$ のいずれかにそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する。

1 以上の整数 n に対して，次の条件 (*) が成り立つ確率を P_n とする。

(*) 時刻 0 から時刻 n まで点 A はつねに $-1 \leqq y-x \leqq 1$ で定まる領域にある。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P_1, P_2, P_3 を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対して，条件 (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が直線 $y-x=0$ 上にある確率を a_n とする。また，条件 (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が直線 $y-x=1$ 上または直線 $y-x=-1$ 上にある確率を b_n とする。a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(3) P_{n+2} を P_{n+1}, P_n を用いて表せ。

(4) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ とおくとき，

$$P_n \leqq \alpha^{n-1}$$

が 1 以上のすべての整数 n に対して成り立つことを証明せよ。

1 解説

点の二つの座標を追う必要はありません。差 $d=y-x$ だけを見ると、一歩で $-1,0,1$ のいずれかが加わり、その確率は各 $1/3$ です。条件は $d=-1,0,1$ から途中で一度も出ないことなので、中央と両端の二種類に分けます。a_n,b_n は、時刻 n での位置だけでなく、それまで条件を保った履歴も含む確率です。一度外へ出て戻った経路を加えてはいけません。

中央から中央への確率は $1/3$、両端のどちらかへの確率は合計 $2/3$ です。端から中央へ戻る確率は $1/3$、同じ端に留まる確率も $1/3$ で、残りの $1/3$ は条件から外れます。これを使って二つの漸化式を作り、$P_n=a_n+b_n$ と結びつけます。(1) の値は短い移動列を数えて求められますが、漸化式で計算した結果と一致することも確かめられます。

初期値は $a_1=1/3, b_1=2/3$ です。端の一方から反対の端へは一歩で行けず、端に留まるのは差の増分 0 の場合だけです。両端をまとめても係数は $1/3$ で、さらに 2 倍しません。式は $a_{n+1}=(a_n+b_n)/3$、$b_{n+1}=(2a_n+b_n)/3$ となります。初期値を入れると $a_2=1/3, b_2=4/9$ で、次の一歩も許される確率は $a_2+(2/3)b_2=17/27$ です。中央と端で生き残る確率が異なるため、合計 P_n の一歩の変化を一定の割合にはできません。

(3) は次の二時刻の式から a_n,b_n を消去します。$P_{n+2}=2P_{n+1}/3+P_n/9$ となり、二項にかかる係数はともに正です。

中間式は $P_{n+1}=a_n+(2/3)b_n$、$P_{n+2}=(7a_n+5b_n)/9$ です。一方、$(2/3)P_{n+1}+(1/9)P_n$ へ $P_n=a_n+b_n$ を代入しても同じ係数になります。二つの状態変数を消せたので、前の二時刻の合計だけで次が決まります。直接移動列を数える場合は三選択ずつで全 3^n 列あり、許される最初の列数 $3,7,17$ から確率 $1,7/9,17/27$ が出ます。状態の確率と操作列を数えた確率は同じ試行を表しています。

(4) では一般項を求める必要はありません。指定の α が $\alpha^2=2\alpha/3+1/9$ を満たすことに注目し、二つ続いた不等式から次の一つを帰納的に示します。二時刻前まで使う漸化式なので、初期条件も P_1,P_2 の両方が必要です。$P_2=7/9<\alpha$ を厳密に確かめた上で、正の係数により不等号の向きを保って代入します。

$P_2<\alpha$ は $\sqrt{2}>4/3$ と同値で、正の両辺を二乗し $2>16/9$ で確かめられます。帰納段階は

$$\frac{2}{3}\alpha^n+\frac{1}{9}\alpha^{n-1}=\alpha^{n-1}\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{9}\right)=\alpha^{n+1}.$$

目標のべきが漸化式と同じ係数関係を満たすため、連続した二つの上界から次へつながります。$n=1,2$ を先に確認したので全ての整数時刻を覆います。途中で外へ出ない確率を使い続けることも、この帰納法の前提です。

2 答案

(1) 点 A の位置を (x,y) とし，$d=y-x$ に注目する。1 回の移動で，$(x+1,y)$ へ移ると $d\mapsto d-1$，$(x+1,y+1)$ へ移ると $d\mapsto d$，$(x,y+1)$ へ移ると $d\mapsto d+1$ である。いずれも確率は $1/3$ である。条件 (*) は，時刻 0 から時刻 n まで常に $-1\leqq d\leqq 1$ にあるという条件である。

時刻 0 では $d=0$ である。1 回後には $-1,0,1$ のいずれかになるので，すべて条件を満たす。したがって $P_1=1$ である。

2 回後を考える。時刻 1 で $d=0$ にいる場合は次も 3 通りすべて許される。時刻 1 で $d=1$ にいる場合は $d=2$ へ行く移動だけが許されず，2 通りが許される。$d=-1$ の場合も同様に 2 通りである。よって全 9 通りのうち許されるものは $3+2+2=7$ 通りであり，$P_2=\frac{7}{9}$ である。

3 回後については，後で用いる a_n,b_n の考え方で数える。時刻 2 で条件を満たして $d=0$ にいる確率は $1/3$，$d=\pm1$ にいる確率の合計は $4/9$ である。次の 1 回で許される確率は，$d=0$ からは 1，$d=\pm1$ からは $2/3$ であるから

$$P_3=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{9}{27}+\frac{8}{27}=\frac{17}{27}$$

である。したがって $P_1=1,\quad P_2=\frac{7}{9},\quad P_3=\frac{17}{27}$ である。

(2) 時刻 n まで条件 (*) を満たし，かつ時刻 n で $d=0$ にいる確率を a_n，時刻 n で $d=1$ または $d=-1$ にいる確率の合計を b_n とする。$d=0$ から次に $d=0$ へ移る確率は $1/3$ であり，$d=1$ または $d=-1$ から $d=0$ へ移る確率もそれぞれ $1/3$ である。したがって $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{a_n+b_n}{3}$ である。