

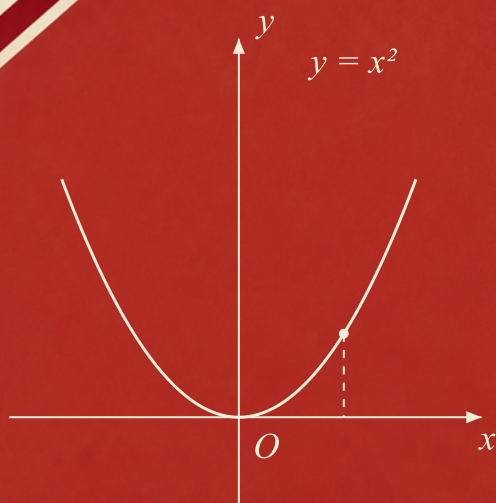
名古屋大学

理系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

名古屋大学

理系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton



はじめに

本書は、名古屋大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	10
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	20
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	29
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	37
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	46
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	55
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	65
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	74
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	84
分野索引		94



2026 年度 名古屋大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

点 O を原点とする xy 平面において、曲線 $y = \frac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分を C とし、 C 上の 2 点 $A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ (ただし $0 < a < 1, a < b$) を考える。 $\theta = \angle BOA$ とおき、2 直線 OA, OB と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) S を a, b を用いて表せ。

(2) $\theta = \frac{\pi}{4}$ であるとき、 b を a を用いて表せ。

(3) 2 点 A, B が C 上で $\theta = \frac{\pi}{4}$ をみたしながら動くとき、 S の最小値を与える a の値を求めよ。

1

解説

曲線と原点からの二直線で囲まれる領域は、横座標 a で上側の境界が変わります。 $0 \leq x \leq a$ では二直線の間、 $a \leq x \leq b$ では曲線と直線 OB の間です。曲線だけを a から b まで積分すると、原点近くの部分と直線の下の部分を取り違えます。二つの積分を足すと、直線が与える項が相殺して $S = \log(b/a)$ となります。

直線は $OA: y = x/a^2, OB: y = x/b^2$ です。 $x < a$ では $x/a^2 < 1/x, x > a$ では逆となるため、上の境界は A で直線から曲線へ変わります。計算は

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2b^2} \right) + \left(\log \frac{b}{a} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2b^2} \right).$$

第一の括弧は二直線の間、第二は双曲線と下の直線の間面積です。定数項と直線に由来する項が消えるので、横座標の比だけが残ります。 $b > a$ なら対数も正となり、面積の符号が一致します。

(2) は傾き $m_A = 1/a^2, m_B = 1/b^2$ を使います。二直線は第一象限にあり、 $m_A > m_B > 0$ なので、そのなす角は鋭角です。各直線の方法角の差に正接の減法公式を使い、

$$\tan \theta = \frac{b^2 - a^2}{1 + a^2 b^2}$$

と表せます。 $\theta = \pi/4$ から b^2 について解き、 $0 < a < 1$ より分母が正であることと、 $b > 0$ であることを使って平方根を選びます。得られた b は $b > 1 > a$ となるので、元の順序条件も満たします。

正接を 1 とする式から $(1 - a^2)b^2 = 1 + a^2$ です。 $a < 1$ が分母の正值を保証し、 $b^2 - 1 = 2a^2/(1 - a^2) > 0$ なので $b > 1$ です。逆にこの正の平方根で決めた b を正接の式へ代入すれば 1 となり、角は鋭角なので $\theta = \pi/4$ に確定します。正接の等式だけで角を決めるときは、角の取り得る範囲の確認も必要です。面積を最小にする段階では、この b の式を代入して a だけの関数にします。

(3) は a の四乗を含む微分を避け、 $u = a^2$ と置きます。 $S = \frac{1}{2} \log\{(u+1)/(u(1-u))\}$ で、 $0 < u < 1$ です。対数が増加するので中の分数だけを最小化できます。導関数の分母は正であり、分子 $u^2 + 2u - 1$ の符号から $u = \sqrt{2} - 1$ で最小となります。开区間の端点は含まれませんが、全区間で減少・増加が確認できるため、この内点が全体の最小です。最後に $a > 0$ から正の平方根を取ります。

分数の微分の分子は $u(1-u) - (u+1)(1-2u) = u^2 + 2u - 1 = (u+1)^2 - 2$ です。 $0 < u < 1$ では根は $\sqrt{2} - 1$ だけで、根の左で負、右で正となります。よって $a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ です。面積には正の係数 $1/2$ と増加する対数を掛けているだけなので、最小点は変わりません。端へ近づくと分母 $u(1-u)$ が 0 となって分数は大きくなることも、内部に唯一の最小点がある結論と整合します。

2 答案

(1) 直線 OA, OB の方程式はそれぞれ

$$y = \frac{x}{a^2}, \quad y = \frac{x}{b^2}$$

である。 $0 < a < b$ より $1/a^2 > 1/b^2$ である。また、 $0 \leq x \leq a$ では 2 直線の間が領域に入り、 $a \leq x \leq b$ では曲線 $y = 1/x$ と直線 OB の間が領域に入る。したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left(\frac{x}{a^2} - \frac{x}{b^2} \right) dx + \int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{b^2} \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2b^2} \right) + \left(\log \frac{b}{a} - \frac{b^2 - a^2}{2b^2} \right) \\ &= \log \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

よって $S = \log \frac{b}{a}$ である。

(2) 直線 OA の傾きは $\frac{1/a}{a} = \frac{1}{a^2}$ であり、直線 OB の傾きは $\frac{1/b}{b} = \frac{1}{b^2}$ である。 $a < b$ なので $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$ である。2 直線のなす角 θ について

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{1 + \frac{1}{a^2 b^2}} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2 + 1}$$

である。 $\theta = \pi/4$ なので $\tan \theta = 1$ である。よって $b^2 - a^2 = a^2 b^2 + 1$ となる。これを b^2 について解くと $b^2(1 - a^2) = a^2 + 1$ である。 $0 < a < 1$ より $1 - a^2 > 0$ だから $b^2 = \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}$ である。 $b > 0$ より $b = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{1 - a^2}}$ である。

(3) (2) の条件のもとで $S = \log \frac{b}{a}$ である。 $x = a^2$ とおくと、 $0 < a < 1$ より $0 < x < 1$ である。また $\frac{b^2}{a^2} = \frac{x+1}{x(1-x)}$ だから $S = \frac{1}{2} \log \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x(1-x)}$ である。対数関数は単調増加なので、 $h(x) = \frac{x+1}{x(1-x)}$ を最小にすればよい。

微分すると

$$h'(x) = \frac{x(1-x) - (x+1)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2(1-x)^2}$$

である。分母は $0 < x < 1$ で正なので、符号は $x^2 + 2x - 1$ で決まる。この 2 次式の $0 < x < 1$ にある根は $x = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$ である。したがって $h'(x) < 0$ から $h'(x) > 0$ に変わるので、 $h(x)$ は $x = \sqrt{2} - 1$ で最小となる。

ゆえに $a^2 = \sqrt{2} - 1$ であり、 $a > 0$ だから、 S の最小値を与える a は $a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ である。



2026 年度 名古屋大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

a を実数とする。空間内の 3 点 $A(2, 1, 3)$, $B(a+2, 3, 4)$, $C(1, 0, 0)$ を含む平面を H とし, 2 点 $D(-1, 2, 1)$, $E(-3, 1, 0)$ を通る直線を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 H が直線 DE と共有点をもつための, a の条件を求めよ。
- (2) 平面 H が線分 DE (両端を含む) と共有点をもつための, a の条件を求めよ。

1

解説

平面と直線の共有点は、直線上の点が平面の方程式を満たすかで調べます。まず $\overrightarrow{AB} = (a, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -3)$ の両方に垂直な $\vec{n}$ を求めます。二つの内積を 0 とする連立式を解けば、 $\vec{n} = (-5, 3a-1, 2-a)$ です。第一成分が常に -5 なので零ベクトルにならず、三点が作る平面の法線として使えます。

法線の成分を (u, v, w) と置けば $au + 2v + w = 0$, $u + v + 3w = 0$ という二式です。 $u = -5, w = 2 - a$ を取ると第二式から $v = 3a - 1$ となり、第一式にも代入して 0 を確かめられます。外積を使わなくても、二方向に垂直な条件だけで求められます。また $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は第二成分と第三成分の比が異なり、平行ではありません。三点は一直線上に並ばず、法線で表した平面は問題の H として一つに定まります。

直線 DE 上の点 X を $\overrightarrow{DX} = s\overrightarrow{DE}$ と表すと、座標は $(-1-2s, 2-s, 1-s)$ です。平面上にある条件 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$ は

$$(9-2a)s + 5(a+2) = 0$$

という一次方程式になります。(1) で係数が 0 になる $a = 9/2$ では、定数項も 0 かどうかを必ず調べます。両方 0 なら直線全体が平面に入りますが、この問題では定数項が 0 でないため平行で共有点がありません。

計算には $\overrightarrow{AX} = (-3-2s, 1-s, -2-s)$ を使います。法線との内積は

$$(-5)(-3-2s) + (3a-1)(1-s) + (2-a)(-2-s)$$

で、定数項が $5(a+2)$ 、 s の係数が $9-2a$ です。 $a = 9/2$ なら前者は $65/2$ となり、 s を変えても 0 になりません。それ以外は係数が 0 でない一次方程式なので共有点がただ一つあります。この段階では s が 0 と 1 の外にあっても直線上の点として許されます。

(2) の線分は $0 \leq s \leq 1$ に対応します。分母 $2a-9$ の符号を分けて、この条件を解きます。 $s = 0$ と $s = 1$ は両端 D, E なので、境界を含めて答えます。

別解では、平面の式の左辺を端点で計算します。値は D で $5(a+2)$ 、 E で $3a+19$ です。線分上ではその値が一次的に変化するので、0 を含むことは二つの値の積が 0 以下であることと同値です。これなら分数不等式を使わずに同じ範囲を求められます。

分数で解く場合、 $s \geq 0$ から $a \leq -2$ または $a > 9/2$ です。前者では分母が負なので、 $s \leq 1$ を掛け戻すと $5(a+2) \geq 2a-9$ 、すなわち $a \geq -19/3$ となります。後者では $a \leq -19/3$ となって両立しません。従って $-19/3 \leq a \leq -2$ です。端点での値の積 $5(a+2)(3a+19)$ もこの二根の間で 0 以下となります。 $a = -2$ では D 、 $a = -19/3$ では E が平面上なので、両端を含める指定とも一致します。

2 答案

(1) $\overrightarrow{AB} = (a, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -3)$ である。これらに垂直なベクトルとして $\vec{n} = (-5, 3a-1, 2-a)$ を取ると、

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

が直接確かめられる。 $\vec{n} \neq \vec{0}$ なので、平面の方程式は $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$ である。

直線 DE 上の点を $\overrightarrow{DX} = s\overrightarrow{DE}$ と表すと、 $X(-1-2s, 2-s, 1-s)$ である。この点が平面上にある条件は

$$(9-2a)s + 5(a+2) = 0.$$

$a \neq 9/2$ なら s について一つの解があり、 $a = 9/2$ なら定数項 $65/2$ が 0 でないため解はない。したがって条件は $a \neq 9/2$ である。

(2) 共有点の s は

$$s = \frac{5(a+2)}{2a-9}.$$

$s \geq 0$ より $a \leq -2$ または $a > 9/2$ である。 $a \leq -2$ では分母が負なので、 $s \leq 1$ は $5(a+2) \geq 2a-9$ 、すなわち $a \geq -19/3$ である。 $a > 9/2$ では $s \leq 1$ から $a \leq -19/3$ が必要となり、両立しない。よって条件は

$$-\frac{19}{3} \leq a \leq -2.$$

両端ではそれぞれ $s = 1, 0$ となり、線分の端点で共有点を持つ。

3 別解・背景

平面の式の左辺を $L(X) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX}$ とすると、 $L(D) = 5(a+2)$, $L(E) = 3a+19$ である。 $\overrightarrow{DX} = s\overrightarrow{DE}$, $0 \leq s \leq 1$ で

$$L(X) = (1-s)L(D) + sL(E)$$

だから、線分上に $L(X) = 0$ となる点が存在する条件は $L(D)L(E) \leq 0$ である。これを解いて $-19/3 \leq a \leq -2$ を得る。