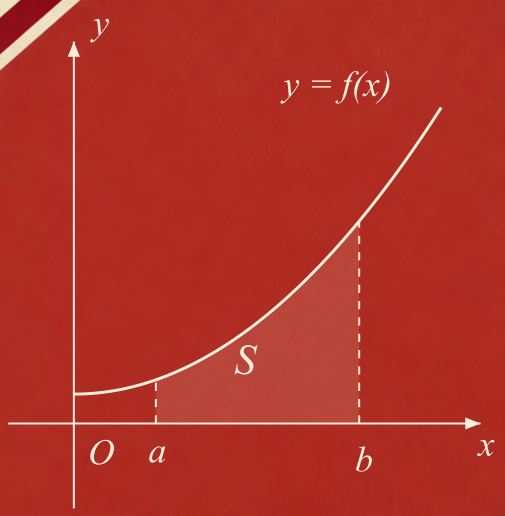
大阪大学

文系

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

大阪大学
文系数学

2017〜2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、大阪大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	7
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	13
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	19
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	25
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	31
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	37
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	42
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	48
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問	55

分野索引 …… 61

2026 年度 大阪大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

正の実数の列 $\{a_n\}$ が次の条件によって定められている．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{3^n a_{n+1}^2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解説

a_{n+1} の平方を a_n で割る漸化式は，項の値を直接追うより，対数を取って掛け算・割り算を足し算・引き算に直すと扱いやすくなります。初めの二項が正で，正の項から次の項も正になるので，すべての n で対数を取れます。$A_n = \log_2 a_n$ とおくと，指数 n は係数へ移り，

$$A_{n+2} = n \log_2 3 + 2A_{n+1} - A_n$$

です。ここで対数の底をそろえることが大切です。右辺の 3^n だけを自然対数で表すと，後の階差とつながりません。

(1) の b_n は A_n の隣接する二項の差です。求めた式を一度に解こうとせず，左辺を二つの差に分けると，

$$(A_{n+2} - A_{n+1}) - (A_{n+1} - A_n) = n \log_2 3, \qquad b_{n+1} - b_n = n \log_2 3$$

となります。つまり b_n の増分は，n に比例して増えます。初項は $b_1 = \log_2 2 - \log_2 1 = 1$ です。b_1 から b_n へ進むには増分を $n-1$ 回足すので，

$$b_n = 1 + (1 + 2 + \cdots + n - 1) \log_2 3 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \log_2 3$$

を得ます。和の最後が $n-1$ になるのは，$b_n - b_{n-1}$ の増分が $(n-1)\log_2 3$ だからです。$n = 1$ では増分を足さず，この式も初項に戻ります。

(2) では，同じ操作をもう一段行い，今度は b_n から元の対数 A_n へ戻します。$b_1 + \cdots + b_{n-1}$ を展開すると，中間の $A_2, \ldots, A_{n-1}$ がすべて消え，$A_n - A_1$ だけが残ります。$A_1 = 0$ なので，

$$A_n = (n-1) + \frac{\log_2 3}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j^2 - j).$$

一次の和と二乗の和を別々に計算し，

$$\sum_{j=1}^{n-1} (j^2 - j) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(n-2)}{3}$$

とまとめます。ここでも上限を n にしてしまうと，求まるのは一項先の対数です。階差を足すたびに，どの項まで復元したかを確認してください。

最後に $a_n = 2^{A_n}$ と戻すと，対数を含む指数は $2^{r \log_2 3} = 3^r$ によって整理できます。したがって

$$a_n = 2^{n-1} 3^{(n-1)n(n-2)/6}.$$

三つの連続する整数の積は 6 の倍数なので，3 の指数が整数になることも分かります。初期値だけでなく指数の二階差を取ると，2 の指数の増分は一定，3 の指数の二階差は n となり，元の漸化式の 3^n とも一致します。対数化，階差の和，元の数への復元という三段階を分けると，添字のずれを防げます。

途中の式の確認には，隣の項の比も使えます。定義から $b_n = \log_2(a_{n+1}/a_n)$ ですから，一般項はこの比が $2\cdot 3^{n(n-1)/2}$ になることを表します。例えば二項目の比は 6 であり，$a_3 = 12$ となります。元の漸化式へ $n = 1$ を入れても同じ値です。この確認は，初期値だけでは見つからない 3 の指数のずれを検出します。対数の二階差が一次，階差が二次，元の対数が三次となる構造を追うことで，計算結果の次数も確認できます。

2 答案

(1) すべての a_n は正であるから，対数を取ることができる。そこで $A_n = \log_2 a_n$ とおく。条件 $a_{n+2} = 3^n a_{n+1}^2/a_n$ の両辺の底を 2 とする対数を取ると $A_{n+2} = n\log_2 3 + 2A_{n+1} - A_n$ である。ここで $b_n = A_{n+1} - A_n$ だから，両辺から A_{n+1} を引いて $b_{n+1} = A_{n+2} - A_{n+1} = b_n + n\log_2 3$ を得る。また $b_1 = \log_2 a_2 - \log_2 a_1 = \log_2 2 - \log_2 1 = 1$ である。したがって $n \geqq 1$ に対して $b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} j\log_2 3 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\log_2 3$ である。よって $b_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\log_2 3$ である。

(2) $A_1 = \log_2 a_1 = 0$ であり，$b_j = A_{j+1} - A_j$ だから，階差を足し合わせると $A_n - A_1 = \sum_{j=1}^{n-1}(A_{j+1} - A_j) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j$ である。したがって $A_n = \sum_{j=1}^{n-1}\left(1 + \frac{j(j-1)}{2}\log_2 3\right)$ となる。ここで $\sum_{j=1}^{n-1} 1 = n - 1$ であり，また

$$\sum_{j=1}^{n-1} j(j-1) = \sum_{j=1}^{n-1}(j^2 - j) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(n-2)}{3}$$

である。よって $A_n = n - 1 + \frac{(n-1)n(n-2)}{6}\log_2 3$ である。したがって

$$a_n = 2^{A_n} = 2^{n-1}\cdot 2^{\frac{(n-1)n(n-2)}{6}\log_2 3} = 2^{n-1}3^{\frac{(n-1)n(n-2)}{6}}$$

となる。ゆえに $a_n = 2^{n-1}3^{\frac{(n-1)n(n-2)}{6}}$ である。$n = 1, 2$ を代入するとそれぞれ $1, 2$ となり，初期条件とも一致する。

3 別解・背景

対数を使わず，$r_n = a_{n+1}/a_n$ とおいてもよい。漸化式より

$$r_{n+1} = 3^n r_n, \qquad r_1 = 2$$

だから $r_n = 2\cdot 3^{n(n-1)/2}$ となる。$a_n = a_1 r_1 r_2 \cdots r_{n-1}$ として指数を足せば，同じ一般項を得る。

2 2026 年度 大阪大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

空間内に 4 点 O, A, B, C があり，$OA = OB = OC = 1$ である．また，$\angle AOB = \angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 60°$ である．t を正の実数とし，点 D, E は $\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = (2t+1)\overrightarrow{OC}$ をみたす点とする．点 P は $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = -1$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} = 1$ をみたしていて，さらに 4 点 A, D, E, P は同一平面上にある．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表せ．

(2) 実数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき，$|\overrightarrow{AP}|$ を最小にする t の値と，$|\overrightarrow{AP}|$ の最小値を求めよ．

1 解説

長さを求める前に，角の条件を内積の一覧へ直します。三つのベクトルの長さはすべて 1 で，$\vec{a}$ は $\vec{b},\vec{c}$ に垂直です。一方，$\vec{b}\cdot\vec{c} = \cos 60° = 1/2$ なので，後の長さの計算ではこの二つの交差項が残ります。三本がすべて直交していると考えて成分の平方だけを足す方法は使えません。

$\vec{b},\vec{c}$ は平行でなく，その二方向が作る平面に $\vec{a}$ は垂直です。したがって三本の係数を比較でき，$\overrightarrow{OP} = x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表せます。内積を取ると，

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{OP} = x = -1, \qquad \vec{b}\cdot\overrightarrow{OP} = y + z/2 = 1.$$

ただし，これだけでは y, z が一つに決まりません。残る情報は，P が平面 ADE にあることです。

平面上の位置を表すときは，平面内の二方向 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ を使います。$t > 0$ だから D と E は異なり，A, D, E は一直線上にありません。ある実数 u, v によって，

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + u(t\vec{b} - \vec{a}) + v((2t+1)\vec{c} - \vec{a})$$

と書けます。ここは線分や三角形の内部という条件ではないので，u, v を非負に制限しません。$\vec{a}$ の係数から $1-u-v = -1$，すなわち $u + v = 2$ です。もう一つの内積条件に $y = ut, z = v(2t+1)$ を入れると，

$$ut + \frac{v(2t+1)}{2} = 1.$$

$u = 2 - v$ を代入すれば t を含む v の項が消えて $2t + v/2 = 1$ となり，$v = 2 - 4t, u = 4t$ を得ます。これが同一平面条件と内積条件を結ぶ計算です。

これらを位置ベクトルへ戻し，始点を O から A へ移すため $\vec{a}$ を引くと，

$$\overrightarrow{AP} = -2\vec{a} + 4t^2\vec{b} + (2 - 8t^2)\vec{c}.$$

t に一次の項が残らないのは，$v(2t+1)$ を展開すると中間の二項が相殺するためです。

(2) では，平方根のある長さを直接微分するより，長さの二乗を最小にします。$\vec{a}$ を含む交差項は零ですが，残る二本については，

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 4 + 16t^4 + (2 - 8t^2)^2 + (4t^2)(2 - 8t^2) = 48t^4 - 24t^2 + 8$$

です。最後の交差項の係数は $2\vec{b}\cdot\vec{c} = 1$ です。偶数次の項しかないので，$s = t^2 > 0$ を使い，

$$48s^2 - 24s + 8 = 48(s - 1/4)^2 + 5$$

と平方完成できます。頂点 $s = 1/4$ は指定範囲内にあり，$t > 0$ から $t = 1/2$ を選べます。この値で平面上の点 P も先の式から実際に定まるので，下限 5 は達成されます。求める量は二乗ではなく長さであるため，最後に正の平方根を取り，最小値 $\sqrt{5}$ とします。

最小時の位置を具体的に確かめると，$u=2, v=0$ で $\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+\vec{b}$ です。これは $\vec{a}$ との内積が -1，$\vec{b}$ との内積が 1 になり，二条件を確かに満たします。また P は A から D を通る直線上の点ですが，線分 AD の外側にあります。もし平面上という条件を三角形内と読み違えて係数を零と一の間に制限すれば，正しい最小点を失います。位置の確認によって，平方完成の等号が元の空間配置で実現することまで押さえられます。

2 答案

(1) 条件より

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0, \qquad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$$

である。$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は同一平面上にない 3 方向を表すので，$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表せる。このとき

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{OP}=x, \qquad \vec{b}\cdot\overrightarrow{OP}=y+\frac{z}{2}$$

であるから，2 つの内積条件より $x=-1, \quad y+\frac{z}{2}=1$ を得る。

一方，D, E は $\overrightarrow{OD}=t\vec{b}, \quad \overrightarrow{OE}=(2t+1)\vec{c}$ である。A, D, E, P が同一平面上にあるので，ある実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+u(t\vec{b}-\vec{a})+v((2t+1)\vec{c}-\vec{a})$$

と書ける。係数を比較すると $x=1-u-v, \quad y=ut, \quad z=v(2t+1)$ である。$x=-1$ より $u+v=2$ であり，また $y+z/2=1$ より $ut+\frac{v(2t+1)}{2}=1$ である。$u=2-v$ を代入すると $(2-v)t+\frac{v(2t+1)}{2}=1$ すなわち $2t+\frac{v}{2}=1$ である。よって $v=2-4t, \quad u=4t$ となる。したがって $y=ut=4t^2, \quad z=v(2t+1)=(2-4t)(2t+1)=2-8t^2$ であるから $\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+4t^2\vec{b}+(2-8t^2)\vec{c}$ となる。ゆえに $\overrightarrow{AP}=-2\vec{a}+4t^2\vec{b}+(2-8t^2)\vec{c}$ である。

(2) (1) で得た式を用いる。$\vec{a}$ は $\vec{b},\vec{c}$ のどちらにも垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1/2$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2 &= (-2)^2+(4t^2)^2+(2-8t^2)^2+2(4t^2)(2-8t^2)\cdot\frac{1}{2}\\ &= 4+16t^4+(2-8t^2)^2+4t^2(2-8t^2)\\ &= 48t^4-24t^2+8.\end{aligned}$$

ここで $s=t^2$ とおくと，$t>0$ より $s>0$ であり $|\overrightarrow{AP}|^2=48s^2-24s+8=48\left(s-\frac{1}{4}\right)^2+5$ となる。したがって最小となるのは $s=\frac{1}{4}$ すなわち $t=\frac{1}{2}$ のときである。このとき $|\overrightarrow{AP}|^2=5$ だから，$|\overrightarrow{AP}|$ の最小値は $\sqrt{5}$ である。以上より，求める t の値は $t=\frac{1}{2}$ である。

3 2026 年度 大阪大学・文系 第 3 問

【数学（文系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

a を正の実数とする．関数 $f(x)=4ax^3+\dfrac{1-a}{a}-6\displaystyle\int_{x-1}^{x}(t^2+t)dt$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値が正となるような a の値の範囲を求めよ．

1 解説

「区間における最小値が正」という条件は，区間のすべての x で $f(x)>0$ となる条件です。特定の x を代入して正になるだけでは足りません。まず f の形を整理し，区間全体の増減から最小点を特定します。積分区間の両端は x を含みますが，被積分関数が多項式なので，定積分を計算してから微分する方法が確実です。

原始関数は $t^3/3+t^2/2$ です。上端と下端の差を取り，$x-1$ を含む式の前の負号を保つと，

$$\int_{x-1}^{x}(t^2+t)dt=\frac{x^3-(x-1)^3}{3}+\frac{x^2-(x-1)^2}{2}=x^2-\frac{1}{6}.$$

したがって，元の定数項と積分から出る 1 が合わさり，

$$f(x)=4ax^3-6x^2+\frac{1}{a},\qquad f'(x)=12x(ax-1)$$

となります。この段階では $a>0$ を固定して x を動かすことに注意します。

$0<x\leqq 1$ では $12x$ は正ですから，増減は $ax-1$ で決まります。符号が替わる候補 $x=1/a$ が区間内か外かによって最小点が変わるため，$a=1$ を境に場合分けします。導関数が零になる $x=0$ もありますが，区間の左端であり，その右側では減少します。零点を挙げるだけで最小点と判断しないことが大切です。

$0<a<1$ なら $ax<1$ なので，関数は区間の端まで減少します。この場合は右端 $x=1$ だけを調べればよく，

$$f(1)>0 \iff 4a-6+1/a>0 \iff 4a^2-6a+1>0.$$

a を掛けても不等号が変わらないのは，仮定 $a>0$ によります。二次式の二根は $(3\pm\sqrt{5})/4$ です。上に開く二次式なので根の外側が正ですが，そのうち $a>(3+\sqrt{5})/4$ は今回の $a<1$ と両立しません。よって残る範囲は $0<a<(3-\sqrt{5})/4$ です。

$a\geqq 1$ なら $1/a$ は区間内にあり，その前で減少，その後で増加します。$a=1$ では停留点が右端と一致しますが，最小値の代入式はそのまま使えます。このとき，

$$f(1/a)=4/a^2-6/a^2+1/a=\frac{a-2}{a^2}$$

です。分母 a^2 は正なので，最小値が正となるのは $a>2$ です。これは場合の条件 $a\geqq 1$ も満たしています。

最後に二つの場合の結果を合わせます。最小値がちょうど零になる $a=(3-\sqrt{5})/4$ と $a=2$ は含めません。前者では $x=1$，後者では $x=1/2$ に零が生じるため，問題の厳密な正の条件に反することを具体的に確認できます。反対に，求めた二つの範囲では最小点での値が正なので，そこから区間全体の正が保証されます。場合分けの条件と不等式の解の共通部分を取ることで，必要性と十分性をそろえられます。

なお $a=1$ では区間全体で減少し，最小値は $f(1)=-1$ です。二つの場合の境界で同じ代入値になることも，場合分けの接続を確かめる材料になります。

2 答案

まず定積分を計算する。

$$\begin{aligned}\int_{x-1}^{x}(t^2+t)\,dt &= \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{x}\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^2}{2}\right)\\ &= x^2-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(x) &= 4ax^3+\frac{1-a}{a}-6\left(x^2-\frac{1}{6}\right)\\ &= 4ax^3-6x^2+\frac{1}{a}\end{aligned}$$

である。よって $f'(x)=12ax^2-12x=12x(ax-1)$ である。

(i) $0<a<1$ **のとき** $0<x\leqq 1$ では $ax<1$ であるから $f'(x)=12x(ax-1)<0$ である。したがって $f(x)$ は $[0,1]$ で減少し，最小値は $x=1$ でとる。よって必要十分条件は $f(1)>0$ である。ここで $f(1)=4a-6+\frac{1}{a}$ だから，$a>0$ に注意して $4a-6+\frac{1}{a}>0 \iff 4a^2-6a+1>0$ である。二次方程式 $4a^2-6a+1=0$ の解は $a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$ である。よって $0<a<1$ と合わせると $0<a<\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ を得る。

(ii) $a\geqq 1$ **のとき**このとき $0<\frac{1}{a}\leqq 1$ である。導関数の符号は，$0<x<1/a$ で負，$1/a<x\leqq 1$ で正となるので，最小値は $x=1/a$ でとる。したがって必要十分条件は $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$ である。計算すると

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{a}\right) &= 4a\cdot\frac{1}{a^3}-6\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\\ &= \frac{4}{a^2}-\frac{6}{a^2}+\frac{1}{a}\\ &= \frac{a-2}{a^2}\end{aligned}$$

である。$a^2>0$ だから，これは $a>2$ と同値である。$a=2$ のとき最小値は 0 であり，問題の「正」には含まれない。

以上より，求める範囲は $0<a<\frac{3-\sqrt{5}}{4}$，　$2<a$ である。

2025 年度 大阪大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2025 年度・前期日程〉

平面上の三角形 OAB を考える．$\angle AOB$ は鋭角，$OA=3$，$OB=t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，$OC=1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ．

(2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ．

(3) 線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

解説

直線 OB への垂線の足 C が与えられているので，この直線を横軸に取ります。$OB=t$ は長さであるため $t>0$ で，$O(0,0), B(t,0)$ と置けます。鋭角という条件から C は O の正の向きにあり，$OC=1$ なので $C(1,0)$ です。C が線分 OB に含まれるとは限りませんが，直線を横軸にした座標表示には影響しません。

$OA=3$ より A の高さの絶対値は $\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ です。上下の反転は内積や長さを変えないので，$A(1,2\sqrt{2})$ とします。このとき，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1,2\sqrt{2})\cdot(t,0)=t.$$

同じ内容は，$\cos\angle AOB=OC/OA=1/3$ を使って $3t\cos\angle AOB=t$ とも確認できます。座標へ移す前に，角が鋭角なので射影の符号が正であることを押さえるのが要点です。

(2) では内分比 $AP:PB=2:1$ から，P は A から B へ全体の $2/3$ だけ進んだ点です。各成分で計算すると，

$$P\left(\frac{1+2t}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

比の 2 を A 側の座標へ掛けると，逆の内分点になるので注意します。R は直線 OB 上にあるため $R(r,0)$ と置き，$AR\perp OP$ を二ベクトルの内積で表します。

$$(r-1)\frac{1+2t}{3}-2\sqrt{2}\frac{2\sqrt{2}}{3}=0,\qquad (r-1)(1+2t)=8.$$

$t>0$ から $1+2t>0$ なので，この一次方程式は一つの解を持ち，$r=(2t+9)/(2t+1)$ です。得た r も正ですから，原点からの長さは $OR=|r|=r$ となります。垂線の条件で求めた点が原点のどちら側にあるかを，計算後に確認します。

(3) では，初めて R の位置を線分 MB へ制限します。$M(t/2,0)$ なので必要十分条件は $t/2\leqq r\leqq t$ です。二つの不等式を同時に解くため，まず一つずつ処理します。右側の $r\leqq t$ では，

$$2t+9\leqq t(2t+1)\iff 2t^2-t-9\geqq 0.$$

二根のうち負の根は $t>0$ と両立せず，$t\geqq(1+\sqrt{73})/4$ です。左側の $t/2\leqq r$ では，

$$t(2t+1)\leqq 2(2t+9)\iff 2t^2-3t-18\leqq 0$$

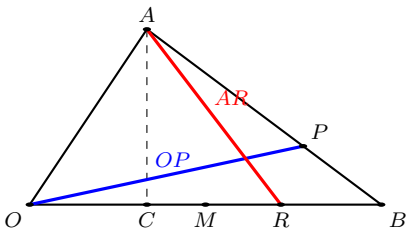
となり，正の範囲では $t\leqq(3+3\sqrt{17})/4$ です。分母を払って不等号が変わらないのは，両方とも同じ正の分母だからです。

最後に二範囲の共通部分を取ります。小さい方の端は $r=t$，すなわち $R=B$ となり，大きい方の端は $r=t/2$，すなわち $R=M$ となります。どちらも「線分上」に含まれるため端点を除きません。例えば $t=3$ では $r=15/7$ となり，$3/2<15/7<3$ を満たすので，求めた範囲が実際の配置を含むことも確かめられます。垂直条件は直線上の交点を求める段階で使い，線分の条件はその後の不等式で使うと，条件の混同を防げます。

点 R を作るときは，A を通り OP に垂直な直線を引き，それと横軸の交点を取っています。P の横座標は正で，OP は鉛直でないため，この垂直な直線は水平にならず，横軸との交点が必ず一つ存在します。この幾何的な存在条件が，計算では r の係数 $1+2t$ が零でないこととして現れます。交点を表す式の分母の確認は，座標の割り算を正当化すると同時に，指定された図形が定まることも保証しています。

2 答案

座標配置の一例として $t=3$ の場合を描くと次のようになる。青線が OP、赤線が AR であり、両者は直交する。



(1) 直線 OB を x 軸に取り，$O=(0,0)$，$B=(t,0)$ とおく。$OB=t$ は長さなので $t>0$ である。

点 A から直線 OB に下ろした垂線の足が C で，$OC=1$ である。また $\angle AOB$ は鋭角なので，C は O から B へ向かう向きにある。したがって，A の x 座標は 1 としてよい。$OA=3$ より，A の y 座標の絶対値は $\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ である。上下どちらにあっても内積や長さの答えは同じなので，$A=(1,2\sqrt{2})$ として計算する。

このとき $\overrightarrow{OA}=(1,2\sqrt{2})$，　$\overrightarrow{OB}=(t,0)$ であるから，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$ である。

(2) 点 P は線分 AB を $2:1$ に内分するので，$AP:PB=2:1$ である。よって $P=\left(\frac{1+2t}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ である。

R は直線 OB 上にあるから，$R=(r,0)$ とおく。直線 AR は直線 OP に垂直なので，$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ である。ここで

$$\overrightarrow{AR}=(r-1,-2\sqrt{2}),\qquad \overrightarrow{OP}=\left(\frac{1+2t}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

だから，$(r-1)\frac{1+2t}{3}-2\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=0$ すなわち $(r-1)(1+2t)-8=0$ である。したがって $r=1+\frac{8}{1+2t}=\frac{2t+9}{2t+1}$ である。$t>0$ より $r>0$ なので，求める長さは $OR=\frac{2t+9}{2t+1}$ である。

(3) M は OB の中点なので，座標は $M=(t/2,0)$ である。R が線分 MB 上にあるための条件は $\frac{t}{2}\leqq r\leqq t$ である。(2) の結果を代入すると $\frac{t}{2}\leqq\frac{2t+9}{2t+1}\leqq t$ である。ここで $2t+1>0$ であるから，分母を払ってよい。

右側の不等式から $\frac{2t+9}{2t+1}\leqq t$ すなわち $2t+9\leqq 2t^2+t$ を得る。よって $2t^2-t-9\geqq 0$ であり，$t>0$ を考えると $t\geqq\frac{1+\sqrt{73}}{4}$ である。

左側の不等式から $\frac{t}{2}\leqq\frac{2t+9}{2t+1}$ すなわち $t(2t+1)\leqq 2(2t+9)$ を得る。よって $2t^2-3t-18\leqq 0$ であり，$t>0$ を考えると $t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}$ である。

以上を合わせて，求める範囲は $\frac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}$ である。