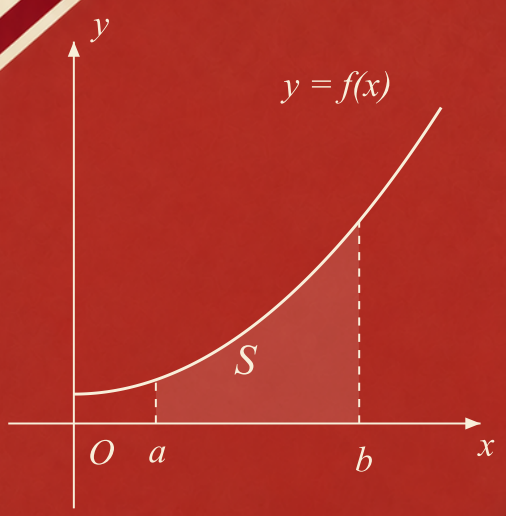
大阪大学

理系

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

大阪大学

理系数学

2017〜2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、大阪大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	21
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	31
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	41
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	51
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	61
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	71
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	81
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	92

分野索引 …… 102

2026 年度 大阪大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

座標平面において，$y = x - x^3$ で表される曲線を C とする．実数 s に対して，C 上の点 $(s,\ s-s^3)$ における C の接線を l_s で表す．t を $0 < t < 1$ をみたす実数とするとき，l_0 と l_1 の交点を P，l_0 と l_t の交点を Q，l_1 と l_t の交点を R とし，三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする．

(1) $S(t)$ を t の式で表せ．

(2) 実数 t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ を最大にする t の値と，$S(t)$ の最大値を求めよ．

解説

三本の接線に囲まれる三角形なので，まず接点の横座標を文字 s にして接線を一度求めます。曲線の導関数は $1 - 3x^2$ であり，接点の座標を使うと，

$$l_s : y - (s - s^3) = (1 - 3s^2)(x - s), \qquad y = (1 - 3s^2)x + 2s^3$$

です。後半の表示なら $s = 0, 1, t$ を代入するだけで，傾きと切片を同時に整理できます。$0 < t < 1$ より l_t の傾きは他の二本の中間にあるので，いずれの交点も一意に定まります。

$l_0 : y = x$ と $l_1 : y = -2x + 2$ から $P(2/3, 2/3)$，l_0 と l_t から $Q(2t/3, 2t/3)$ です。後者では $3t^2 x = 2t^3$ を t^2 で割りますが，$t > 0$ がその操作を保証します。残る交点 R については，

$$3(1 - t^2)x = 2(1 - t^3), \qquad X_R = \frac{2(t^2 + t + 1)}{3(t + 1)}$$

と整理します。分子分母から $1 - t$ を消せるのは $t < 1$ だからです。$Y_R = -2X_R + 2$ を使えば，R の高さも求まります。

面積は，既に同一直線 $y = x$ 上にある P, Q を底辺に選ぶと簡単です。底辺の長さは横座標の差の $\sqrt{2}$ 倍なので，$PQ = 2\sqrt{2}(1 - t)/3$ です。高さには，R からこの斜めの直線までの距離を使います。横座標だけで計算すると底辺と高さの双方を取り違えるため，それぞれを分けて求めます。$Y_R = -2X_R + 2$ から，

$$X_R - Y_R = 3X_R - 2 = \frac{2t^2}{t + 1} > 0$$

です。したがって高さは $\sqrt{2}t^2/(t + 1)$，面積は

$$S(t) = \frac{1}{2} PQ \cdot \frac{|X_R - Y_R|}{\sqrt{2}} = \frac{2t^2(1 - t)}{3(t + 1)}.$$

この値は区間内で正であり，三交点が一直線上に並ぶ退化も起こりません。

(2) は商の微分を行い，正の因子と符号を決める因子を分けます。計算すると，

$$S'(t) = -\frac{4t(t^2 + t - 1)}{3(t + 1)^2}.$$

分母と t は正なので，符号は二次式の逆の符号です。正の根 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ は $0 < \alpha < 1$ を満たし，その前で増加，後で減少します。両端は区間に含まれませんが，内部で増減が切り替わるため，ここで最大値が実際に得られます。端へ近づくと面積は零になることも，図の退化と一致します。

最大値の整理では，根号を五乗して展開する代わりに，停留点が満たす $\alpha^2 + \alpha = 1$ を使います。$1 - \alpha = \alpha^2$，$1 + \alpha = 1/\alpha$ より $S(\alpha) = 2\alpha^5/3$ です。さらに $\alpha^3 = 2\alpha - 1$，$\alpha^4 = 2 - 3\alpha$，$\alpha^5 = 5\alpha - 3$ と次数を下げれば，最大値 $(5\sqrt{5} - 11)/3$ を得ます。接点の条件で根号式を低次へ戻す工夫は，他の最大最小問題にも使えます。

三交点を先に求める際は，R の複雑な二座標をすべて展開しなくても，高さに必要な差だけを計算できます。直線 l_1 上という条件を使って $X_R-Y_R=3X_R-2$ とすれば，分母をそろえる回数が減り，面積の因子 t^2 が直接現れます。一方，底辺に現れる $1-t$ は P と Q が近づくことに対応します。t を両端へ近づけたときの二つの退化を，式の異なる因子として読み取れるため，最後の面積式の妥当性も確認できます。

2　答案

(1) 曲線 $C:y=x-x^3$ について $y'=1-3x^2$ である。したがって，C 上の点 $(s,s-s^3)$ における接線は $y-(s-s^3)=(1-3s^2)(x-s)$ であり，整理すると $l_s:\quad y=(1-3s^2)x+2s^3$ となる。よって $l_0:\ y=x$，　$l_1:\ y=-2x+2$，　$l_t:\ y=(1-3t^2)x+2t^3$ である。

まず P は l_0 と l_1 の交点なので $x=-2x+2$ より $P=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ である。次に Q は l_0 と l_t の交点なので $x=(1-3t^2)x+2t^3$ であり，$t>0$ より $3t^2x=2t^3$，　$x=\frac{2t}{3}$ となる。したがって $Q=\left(\frac{2t}{3},\frac{2t}{3}\right)$ である。さらに R は l_1 と l_t の交点なので $-2x+2=(1-3t^2)x+2t^3$ より $3(1-t^2)x=2(1-t^3)$ である。$0<t<1$ だから $1-t^2\neq 0$ であり，$x=\frac{2(1-t^3)}{3(1-t^2)}=\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}$ を得る。これを $y=-2x+2$ に代入して $y=\frac{2(1-t)(2t+1)}{3(t+1)}$ となる。すなわち $R=\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\frac{2(1-t)(2t+1)}{3(t+1)}\right)$ である。

点 P,Q はともに直線 $y=x$ 上にある。したがって $PQ=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2t}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}(1-t)}{3}$ である。また，点 $R=(X_R,Y_R)$ について $X_R-Y_R=\frac{2(t^2+t+1)-2(1-t)(2t+1)}{3(t+1)}=\frac{2t^2}{t+1}$ であるから，R から直線 $y=x$ までの距離は $\frac{|X_R-Y_R|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}t^2}{t+1}$ である。よって三角形 PQR の面積は

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}(1-t)}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}t^2}{t+1}=\frac{2t^2(1-t)}{3(t+1)}$$

である。

(2) $S(t)=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^2(1-t)}{t+1}$ である。微分すると

$$\begin{aligned}S'(t)&=\frac{2}{3}\cdot\frac{(2t-3t^2)(t+1)-(t^2-t^3)}{(t+1)^2}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2t-2t^2-2t^3}{(t+1)^2}\\&=-\frac{4t(t^2+t-1)}{3(t+1)^2}\end{aligned}$$

である。$0<t<1$ では $t>0$，$(t+1)^2>0$ なので，符号は $-(t^2+t-1)$ で決まる。$t^2+t-1=0$ の正の解は $\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。$0<t<\alpha$ では $t^2+t-1<0$ だから $S'(t)>0$，$\alpha<t<1$ では $S'(t)<0$ である。したがって $S(t)$ は $t=\alpha$ で最大となる。

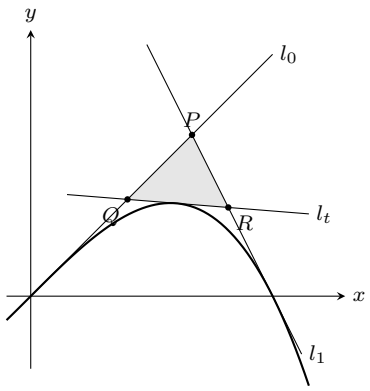
最大値を求める。$\alpha^2+\alpha=1$ より $1-\alpha=\alpha^2$，また $1+\alpha=1/\alpha$ である。したがって

$$S(\alpha)=\frac{2\alpha^2(1-\alpha)}{3(1+\alpha)}=\frac{2\alpha^4}{3(1+\alpha)}=\frac{2\alpha^5}{3}$$

である。$\alpha=(\sqrt{5}-1)/2$ を代入して整理すると $\frac{2\alpha^5}{3}=\frac{5\sqrt{5}-11}{3}$ となる。よって求める t と最大値は

$$t=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\qquad S_{\max}=\frac{5\sqrt{5}-11}{3}$$

である。



図は $t=3/5$ の場合。

2 2026 年度 大阪大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

空間内に 4 点 O, A, B, C があり，$OA = OB = OC = 1$ である．また，$\angle AOB = \angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 60°$ である．t を正の実数とし，点 D, E は $\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = (2t+1)\overrightarrow{OC}$ をみたす点とする．点 P は $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = -1$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} = 1$ をみたしていて，さらに 4 点 A, D, E, P は同一平面上にある．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表せ．

(2) 実数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき，$|\overrightarrow{AP}|$ を最小にする t の値と，$|\overrightarrow{AP}|$ の最小値を求めよ．

1 解説

長さを求める前に，角の条件を内積の一覧へ直します。三つのベクトルの長さはすべて 1 で，$\vec{a}$ は $\vec{b},\vec{c}$ に垂直です。一方，$\vec{b}\cdot\vec{c} = \cos 60° = 1/2$ なので，後の長さの計算ではこの二つの交差項が残ります。三本がすべて直交していると考えて成分の平方だけを足す方法は使えません。

$\vec{b},\vec{c}$ は平行でなく，その二方向が作る平面に $\vec{a}$ は垂直です。したがって三本の係数を比較でき，$\overrightarrow{OP} = x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表せます。内積を取ると，

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{OP} = x = -1, \qquad \vec{b}\cdot\overrightarrow{OP} = y + z/2 = 1.$$

ただし，これだけでは y, z が一つに決まりません。残る情報は，P が平面 ADE にあることです。

平面上の位置を表すときは，平面内の二方向 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ を使います。$t > 0$ だから D と E は異なり，A, D, E は一直線上にありません。ある実数 u, v によって，

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + u(t\vec{b} - \vec{a}) + v((2t+1)\vec{c} - \vec{a})$$

と書けます。ここは線分や三角形の内部という条件ではないので，u, v を非負に制限しません。$\vec{a}$ の係数から $1-u-v = -1$，すなわち $u + v = 2$ です。もう一つの内積条件に $y = ut, z = v(2t+1)$ を入れると，

$$ut + \frac{v(2t+1)}{2} = 1.$$

$u = 2 - v$ を代入すれば t を含む v の項が消えて $2t + v/2 = 1$ となり，$v = 2 - 4t, u = 4t$ を得ます。これが同一平面条件と内積条件を結ぶ計算です。

これらを位置ベクトルへ戻し，始点を O から A へ移すため $\vec{a}$ を引くと，

$$\overrightarrow{AP} = -2\vec{a} + 4t^2\vec{b} + (2 - 8t^2)\vec{c}.$$

t に一次の項が残らないのは，$v(2t+1)$ を展開すると中間の二項が相殺するためです。

(2) では，平方根のある長さを直接微分するより，長さの二乗を最小にします。$\vec{a}$ を含む交差項は零ですが，残る二本については，

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 4 + 16t^4 + (2 - 8t^2)^2 + (4t^2)(2 - 8t^2) = 48t^4 - 24t^2 + 8$$

です。最後の交差項の係数は $2\vec{b}\cdot\vec{c} = 1$ です。偶数次の項しかないので，$s = t^2 > 0$ を使い，

$$48s^2 - 24s + 8 = 48(s - 1/4)^2 + 5$$

と平方完成できます。頂点 $s = 1/4$ は指定範囲内にあり，$t > 0$ から $t = 1/2$ を選べます。この値で平面上の点 P も先の式から実際に定まるので，下限 5 は達成されます。求める量は二乗ではなく長さであるため，最後に正の平方根を取り，最小値 $\sqrt{5}$ とします。

最小時の位置を具体的に確かめると，$u=2, v=0$ で $\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+\vec{b}$ です。これは $\vec{a}$ との内積が -1，$\vec{b}$ との内積が 1 になり，二条件を確かに満たします。また P は A から D を通る直線上の点ですが，線分 AD の外側にあります。もし平面上という条件を三角形内と読み違えて係数を零と一の間に制限すれば，正しい最小点を失います。位置の確認によって，平方完成の等号が元の空間配置で実現することまで押さえられます。

2 答案

(1) 条件より

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0, \qquad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$$

である。$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は同一平面上にない 3 方向を表すので，$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表せる。このとき

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{OP}=x, \qquad \vec{b}\cdot\overrightarrow{OP}=y+\frac{z}{2}$$

であるから，2 つの内積条件より $x=-1, \quad y+\frac{z}{2}=1$ を得る。

一方，D, E は $\overrightarrow{OD}=t\vec{b}, \quad \overrightarrow{OE}=(2t+1)\vec{c}$ である。A, D, E, P が同一平面上にあるので，ある実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+u(t\vec{b}-\vec{a})+v((2t+1)\vec{c}-\vec{a})$$

と書ける。係数を比較すると $x=1-u-v, \quad y=ut, \quad z=v(2t+1)$ である。$x=-1$ より $u+v=2$ であり，また $y+z/2=1$ より $ut+\frac{v(2t+1)}{2}=1$ である。$u=2-v$ を代入すると $(2-v)t+\frac{v(2t+1)}{2}=1$ すなわち $2t+\frac{v}{2}=1$ である。よって $v=2-4t, \quad u=4t$ となる。したがって $y=ut=4t^2, \quad z=v(2t+1)=(2-4t)(2t+1)=2-8t^2$ であるから $\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+4t^2\vec{b}+(2-8t^2)\vec{c}$ となる。ゆえに $\overrightarrow{AP}=-2\vec{a}+4t^2\vec{b}+(2-8t^2)\vec{c}$ である。

(2) (1) で得た式を用いる。$\vec{a}$ は $\vec{b},\vec{c}$ のどちらにも垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1/2$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2 &= (-2)^2+(4t^2)^2+(2-8t^2)^2+2(4t^2)(2-8t^2)\cdot\frac{1}{2}\\ &= 4+16t^4+(2-8t^2)^2+4t^2(2-8t^2)\\ &= 48t^4-24t^2+8.\end{aligned}$$

ここで $s=t^2$ とおくと，$t>0$ より $s>0$ であり $|\overrightarrow{AP}|^2=48s^2-24s+8=48\left(s-\frac{1}{4}\right)^2+5$ となる。したがって最小となるのは $s=\frac{1}{4}$ すなわち $t=\frac{1}{2}$ のときである。このとき $|\overrightarrow{AP}|^2=5$ だから，$|\overrightarrow{AP}|$ の最小値は $\sqrt{5}$ である。以上より，求める t の値は $t=\frac{1}{2}$ である。

3 2026 年度 大阪大学・理系 第 3 問

【数学（理系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

a を実数とし，複素数 z に対して

$$f(z)=\frac{(1-ai)z+(1+ai)\overline{z}}{2}$$

とする．ただし，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z と共役な複素数である．

(1) $f(z)$ は実数であることを示せ．

(2) 実数 a に対して，$|z|=1$ かつ

$$f(z)\{f(z)-f(i)-2\}=-2f(i)$$

となるような複素数 z の個数を $N(a)$ とする．$N(a)$ を求めよ．

1 解説

共役を含む式では，$z=x+yi$ と置いて実部と虚部を分けると，条件の意味が見えます。x,y は実数で，$\overline{z}=x-yi$ ですから，二項は

$$(1-ai)z=(x+ay)+(y-ax)i,\qquad (1+ai)\overline{z}=(x+ay)-(y-ax)i$$

になります。虚部が反対符号で打ち消し合うため，$f(z)=x+ay$ は実数です。この式は，単に実数性を示すだけでなく，(2) の条件を座標平面の直線へ移すためにも使います。

$f(i)=a$ を代入し，実数 $f(z)$ を一つの未知数として見ると，

$$f(z)^2-(a+2)f(z)+2a=\{f(z)-a\}\{f(z)-2\}=0$$

です。したがって $f(z)=a$ または $f(z)=2$ となります。ただし $f(z)$ の値を二つ数えれば答えになるわけではありません。一つの値に対して，条件 $|z|=1$ を満たす点が何個あるかを別に調べる必要があります。

$|z|=1$ は $x^2+y^2=1$ ですから，求めるのは単位円と

$$L_1:x+ay=a,\qquad L_2:x+ay=2$$

との交点の個数です。円と直線では，中心から直線までの距離が半径より小さければ二点，等しければ接して一点，大きければ零点となります。この幾何的な分類を使うと，y を消去した二次方程式を二本とも解く必要がありません。$a=0$ でも直線の x の係数は 1 なので，距離公式はそのまま使えます。

L_1 までの距離は $|a|/\sqrt{1+a^2}$ です。二乗して比べると $a^2<1+a^2$ なので，すべての実数 a で距離は 1 未満です。つまり第一の条件からは常に二点得られます。L_2 までの距離は $2/\sqrt{1+a^2}$ であり，これが 1 と等しくなる条件は $a^2=3$ です。よって $|a|<\sqrt{3}$ では零点，$|a|=\sqrt{3}$ では一点，$|a|>\sqrt{3}$ では二点が加わります。

ただし，ここでそのまま二本の交点数を足すと，一つの例外を落とします。二直線は左辺が同じなので，一致しないときは平行で，交点の重なりもありません。右辺が等しい $a=2$ のときだけ一致し，同じ円周上の二点を二度数えてしまいます。このときは $N(2)=2$ です。$a=-2$ では右辺が -2 と 2 で異なるため，四点のままであることも確認してください。

したがって，通常は第一の二点に第二の交点数を足し，$a=2$ だけを除外して整理します。接点が生じる $a=\pm\sqrt{3}$ では三点，二直線が一致する $a=2$ では二点です。これらは原因の異なる例外です。条件式の二つの因子と図形の二直線が同じ分類を表していることを押さえると，因数分解の重根を別の複素数の点として数える誤りを防げます。

2 答案

(1) $z=x+yi$ とおく。ただし x, y は実数である。このとき $\overline{z}=x-yi$ だから

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(1-ai)(x+yi)+(1+ai)(x-yi)}{2} \\ &= \frac{(x+ay)+(y-ax)i+(x+ay)+(-y+ax)i}{2} \\ &= x+ay \end{aligned}$$

である。x, y, a はいずれも実数なので，$x+ay$ は実数である。したがって $f(z)$ は実数である。

(2) (1) より，$z=x+yi$ とすると $f(z)=x+ay$ である。また $i=0+1i$ だから $f(i)=a$ である。条件式は $f(z)\{f(z)-a-2\}=-2a$ すなわち $f(z)^2-(a+2)f(z)+2a=0$ である。これは $\{f(z)-a\}\{f(z)-2\}=0$ と因数分解できる。したがって求める点は，単位円 $x^2+y^2=1$ 上にあり，かつ $x+ay=a$ または $x+ay=2$ を満たす点である。

まず直線 $L_1:\ x+ay=a$ を考える。原点からこの直線までの距離は $\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$ であり，これはすべての実数 a について $\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}<1$ を満たす。よって L_1 は単位円と常に 2 点で交わる。

次に直線 $L_2:\ x+ay=2$ を考える。原点から L_2 までの距離は $\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ である。したがって，単位円との交点数は $\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}>1 \iff |a|<\sqrt{3}$ のとき 0 個，$\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}=1 \iff |a|=\sqrt{3}$ のとき接して 1 個，$\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}<1 \iff |a|>\sqrt{3}$ のとき 2 個である。

ただし，L_1 と L_2 が一致する場合は重複して数えてはいけない。2 本の直線は左辺が同じなので，一致するのは $a=2$ のときだけである。この場合は $L_1=L_2$ であり，単位円との交点は 2 個である。

以上より

$$N(a)=\begin{cases} 2 & (|a|<\sqrt{3}), \\ 3 & (|a|=\sqrt{3}), \\ 2 & (a=2), \\ 4 & (|a|>\sqrt{3},\ a\neq 2) \end{cases}$$

である。

2026 年度 大阪大学・理系 第 4 問

【数学（理系）第 4 問】〈2026 年度・前期日程〉

実数 x に対して $f(x)=e^{-x}\cos x$ とする．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $1-x \leqq f(x) \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 a に対して

$$I(a)=\int_0^a \frac{(x+a)f(x)}{x^2+a^2}\,dx$$

とするとき，$\lim\limits_{a\to+0} I(a)$ を求めよ．

1　解説

(1) の下側 $1-x$ は，$f(0)=1$, $f'(0)=-1$ から分かる原点側の接線です。接線との上下を示すには，差 $f(x)-(1-x)$ の増減を調べます。まず二回微分すると，

$$f'(x)=-e^{-x}(\cos x+\sin x), \qquad f''(x)=2e^{-x}\sin x$$

です。指定区間では正弦が非負なので f' は増加し，$f'(x) \geqq f'(0)=-1$ となります。そこで $g(x)=f(x)-1+x$ と置けば，$g'(x)=f'(x)+1 \geqq 0$，$g(0)=0$ です。よって $g(x) \geqq 0$ となり，下側の不等式を得ます。二次導関数が非負という事実を，差の符号まで一段ずつ結びます。

上側は，区間内の $0 \leqq \cos x \leqq 1$ と $0 < e^{-x} \leqq 1$ を掛ければ $f(x) \leqq 1$ です。余弦が非負であるため，積に対するこの評価が使えます。両端 $x=0, \pi/2$ も式が定義されているので，不等式の範囲に含めてかまいません。

(2) では積分区間が零へ縮む一方，分母も零に近づきます。区間が短くなることだけから積分が零になるとは判断できません。特に $x=0$ を先に代入すると重みは $1/a$ になり，区間の幅と釣り合っています。そこで $x=au$ と置き，この幅を変数に吸収します。分子は $a(u+1)$，分母は $a^2(u^2+1)$，$dx=a\,du$ なので，

$$I(a)=\int_0^1 \frac{u+1}{u^2+1}f(au)\,du$$

です。微小な a の因子はすべて消え，積分区間も固定されました。

(1) を使える範囲かを確認すると，$0 \leqq u \leqq 1$ より $0 \leqq au \leqq a \leqq \pi/2$ です。したがって $1-au \leqq f(au) \leqq 1$ となり，さらに $au \leqq a$ から $1-a \leqq f(au)$ です。下限を u によらない値にそろえると，積分全体を簡単に評価できます。重み $(u+1)/(u^2+1)$ は区間内で正なので，

$$J=\int_0^1 \frac{u+1}{u^2+1}\,du, \qquad (1-a)J \leqq I(a) \leqq J$$

を得ます。J は有限の定数で，$a\to+0$ では上下とも J に近づきます。これにより極限と積分を交換する定理を使わず，はさみうちで極限を決定できます。

残る積分は，分子を u と 1 に分けます。前者は分母の微分が $2u$ なので，原始関数は $\log(1+u^2)/2$ です。後者は $u=\tan\theta$ と置き，$du=(1+\tan^2\theta)d\theta$ を分母と打ち消します。$u=0,1$ はそれぞれ $\theta=0,\pi/4$ に対応するため，

$$J=\frac{1}{2}\log 2+\int_0^{\pi/4} 1\,d\theta=\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}.$$

置換の目的は，積分を厳密に求めることと，極限に適した固定区間を作ることの二つです。各場面で区間と変化率をそろえると，消える a の個数を確実に追えます。

同じ上下評価から $0 \leqq J - I(a) \leqq aJ$ も分かります。これは積分の誤差が区間の幅 a 以下の速さで小さくなるという，具体的な評価です。各 u で $f(au)$ が一に近づくと言うだけでは，積分全体の誤差を直接押さえたことにはなりません。今回は一つの下限 $1-a$ が区間全体に共通して使えるため，どの u で近づき方が遅くても誤差の総量を同じ式で制限できます。この一様な下限を (1) の誘導から作ることが，極限の論証の中心です。

2 答案

(1) $0 \leqq x \leqq \pi/2$ では $0 \leqq \cos x \leqq 1$，$e^{-x} \leqq 1$ なので $f(x) \leqq 1$ である。また

$$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x), \qquad f''(x) = 2e^{-x}\sin x \geqq 0.$$

よって $f'(x) \geqq f'(0) = -1$ である。$g(x) = f(x) - 1 + x$ とおけば，$g'(x) = f'(x) + 1 \geqq 0$，$g(0) = 0$ だから $g(x) \geqq 0$ である。したがって $1 - x \leqq f(x) \leqq 1$ を得る。

(2) $x = au$ とおくと

$$I(a) = \int_0^1 \frac{(u+1)f(au)}{u^2+1}\,du.$$

$0 \leqq u \leqq 1$ で $0 \leqq au \leqq a \leqq \pi/2$ なので，(1) より $1 - a \leqq f(au) \leqq 1$ である。ここで

$$J = \int_0^1 \frac{u+1}{u^2+1}\,du$$

とおくと，重みが正であることから $(1-a)J \leqq I(a) \leqq J$ である。J は有限だから，はさみうちにより $\lim_{a \to +0} I(a) = J$ である。

さらに

$$\int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\log 2.$$

もう一方は $u = \tan\theta$ と置けば，$0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ で $du = (1 + \tan^2\theta)d\theta$ だから，

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \int_0^{\pi/4} 1\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

したがって求める極限は $\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}$ である。