大学入試過去問シリーズ

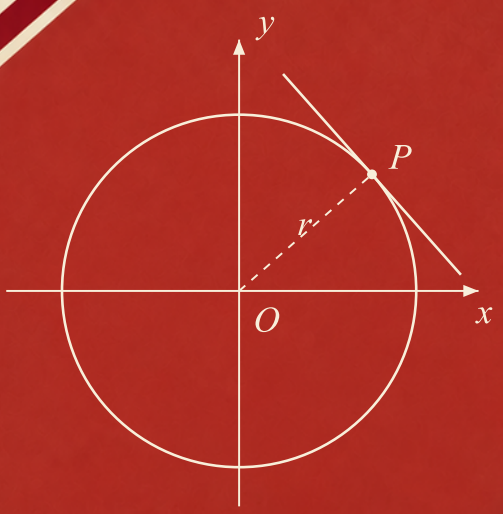
東京科学大学

理系（旧東京工業大学）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

東京科学大学・東京工業大学

理系数学

2017〜2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、東京科学大学・東京工業大学の前期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	21
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	31
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	41
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	51
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	61
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	71
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	81
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問	91

分野索引 …… 101

2026 年度 東京科学大学・東京工業大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

(1) x は無理数であり，有理数 a, b および正の整数 n により $x = a + b\sqrt{n}$ と表されるとする。このとき，$x^2 + px + q = 0$ が成り立つような有理数 p, q を求めよ。また，そのような有理数 p, q の組はただ一つに限ることを示せ。

(2) x は無理数であり，有理数 a, b および正の整数 n により $x = a + b\sqrt[3]{n}$ と表されるとする。このとき，$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ が成り立つような有理数 p, q, r を求めよ。また，そのような有理数 p, q, r の組はただ一つに限ることを示せ。

解説

(1) 求めるのは、与えられた無理数 x を解に持つ、有理係数の二次方程式です。$x = a + b\sqrt{n}$ を見て、x に数値を代入して調べる必要はありません。根号を一方に移し、二乗して根号を消すと、必要な方程式を作れます。ただし、方程式を一つ作っただけでは、係数の一意性を示したことにはなりません。

二つの組 (p, q) と (p', q') があると仮定し、二つの方程式を引きます。最高次の係数はどちらも 1 なので、二次の項が消え、

$$(p - p')x + (q - q') = 0$$

となります。$p - p'$ が 0 でなければ、この式を x について解くことで x が有理数になってしまいます。したがって $p = p'$、続いて $q = q'$ です。最高次の係数を 1 に固定していることが、この引き算を可能にしています。

(2) 三乗根も、根号を移して三乗すれば消せます。ただし、一意性では (1) と同じ結論へすぐに進めません。三次式どうしの差は二次式ですから、x が無理数であることだけでは矛盾しません。例えば $\sqrt{2}$ は無理数ですが、有理係数の二次方程式 $x^2 - 2 = 0$ を満たします。ここでは、三乗根で表されるという条件まで使う必要があります。

$\alpha = \sqrt[3]{n}$ と置き、α が有理係数の二次式を満たしたと仮定します。二次の係数が 0 でなければ、$\alpha^2 = u\alpha + v$ と書けます。この式を使って α^3 も一次式に直すと、

$$n = (u^2 + v)\alpha + uv$$

です。$u^2 + v \neq 0$ なら α が有理数になるので矛盾します。残る $u^2 + v = 0$ の場合にも、$n = -u^3$ から $\alpha = -u$ となります。実数の三乗は一対一に対応するので、この最後の結論に別の根を考える必要はありません。

これで、α についての二次以下の有理係数の関係式は、すべての係数が 0 の場合しかないと分かりました。$x = a + b\alpha$ では $b \neq 0$ なので、x についての二次以下の関係式も同じ性質を持ちます。最後に二つの三次式の差へこの結果を使えば、一意性を示せます。

2　答案

(1) x は無理数なので $b \neq 0$ である。$(x-a)^2 = b^2 n$ より

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 n = 0.$$

したがって、求める有理数の組は

$$p = -2a, \qquad q = a^2 - b^2 n$$

である。別の有理数の組 (p', q') も条件を満たすとすると、差を取って

$$(p - p')x + (q - q') = 0.$$

$p \neq p'$ なら x が有理数になるので、$p = p'$ であり、$q = q'$ も従う。

(2) $\alpha = \sqrt[3]{n}$ と置くと、$b \neq 0$ で α も無理数である。$(x-a)^3 = b^3 n$ より

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2 x - a^3 - b^3 n = 0.$$

よって一つの組は

$$p = -3a, \quad q = 3a^2, \quad r = -a^3 - b^3 n.$$

まず、有理数 A, B, C について $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ なら $A = B = C = 0$ であることを示す。$A = 0$ の場合は α の無理数性から $B = C = 0$ となる。$A \neq 0$ の場合、$u = -B/A, v = -C/A$ と置くと

$$\alpha^2 = u\alpha + v, \qquad n = (u^2 + v)\alpha + uv.$$

$u^2 + v \neq 0$ なら α が有理数になる。$u^2 + v = 0$ なら $n = uv = -u^3$ なので $\alpha = -u$ となる。いずれも矛盾するから、$A \neq 0$ の場合は存在しない。

別の有理数の組 (p', q', r') も条件を満たすとする。二つの式を引き、$x = a + b\alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 = {} & (p - p')b^2\alpha^2 \\ & + \{2ab(p - p') + b(q - q')\}\alpha \\ & + a^2(p - p') + a(q - q') + (r - r'). \end{aligned}$$

先ほどの結果から各係数は 0 である。$b \neq 0$ なので、二次、一次、定数の係数の順に $p = p', q = q', r = r'$ を得る。したがって組は一意である。

3　別解・背景

一意性を示すときは、最高次の係数を 1 にそろえている点を確認してください。この条件がなければ、一つの方程式の両辺を有理数倍して別の係数を作れてしまいます。(2) では「無理数だから二次式を満たさない」と省略せず、三乗根の性質を使った論証を残します。

2 2026 年度 東京科学大学・東京工業大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

n は 4 以上の整数であり，x, y, z はすべて正の整数であるとする。

(1) $1 \leqq r < n$ をみたす整数 r に対して，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ および ${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r$ が成り立つことを示せ。

(2) 空間の点 (x, y, z) で，$x + y + z < n$ をみたすものの個数を n を用いて表せ。

(3) 空間の点 (x, y, z) で，$x + y + z = 3n$ かつ $x < y < z$ をみたすものの個数を n を用いて表せ。

1 解説

(1) 二つの等式は、同じ選び方を異なる基準で分類すると示せます。最初の式では、特定の 1 個を選ぶかどうかで分けます。二つの場合は同時には起こらず、すべての選び方がどちらかに入るので、その個数を足せます。

二つ目の式では、$1, 2, \ldots, n+1$ から $r+1$ 個を選び、選んだ数の最大値に注目します。最大値を $k+1$ と決めれば、残り r 個は $1, \ldots, k$ から選ぶことになります。最大値の最小値は $r+1$、最大値は $n+1$ なので、和の範囲は $r \leqq k \leqq n$ です。最大値はただ一つに決まるため、重複して数えることもありません。

(2) x, y, z が正の整数であることから、和を s とすると $3 \leqq s \leqq n-1$ です。和が s の組は、横一列に並べた s 個の印の間に 2 本の仕切りを入れて数えられます。三つとも正にするため、仕切りを入れる場所は $s-1$ か所の隙間から異なる 2 か所を選びます。したがって、その個数は ${}_{s-1}\mathrm{C}_2$ です。s について足すと (1) の二つ目の等式を使えます。不等号が厳密なので、$s = n$ を含めないことに注意してください。

(3) まず $x < y < z$ を外し、和が $3n$ の順序つきの組を数えます。三つの値が異なれば、並べ替えは $3! = 6$ 通りで、そのうち増加順は 1 通りです。しかし、初めから全体を 6 で割ることはできません。二つの値が等しい組の並べ替えは 3 通り、三つとも等しい組は 1 通りだからです。先にこれらを除き、三つの値が異なる組だけを 6 で割ります。

三つとも等しいのは (n, n, n) の 1 組です。ちょうど二つが等しい場合は、その値を u、残りを v と置くと

$$2u + v = 3n, \qquad u \neq v$$

です。v を置く位置は 3 通りあります。$v = 3n - 2u > 0$ より $u < 3n/2$ となり、ここで n の偶奇によって整数の上限が変わります。さらに $u = n$ は三つとも等しい組なので、必ず除きます。この順で分類すると、等しい値のある組を重複して引かずに済みます。

2 答案

(1) n 個から r 個を選ぶとき、特定の 1 個を選ばない場合と選ぶ場合に分けると

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}. $$

また、$1, \ldots, n+1$ から $r+1$ 個を選ぶ方法を、最大値 $k+1$ で分類する。残り r 個の選び方は ${}_k\mathrm{C}_r$ 通りであるから

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r. $$

(2) $x+y+z=s$ となる正の整数の組は ${}_{s-1}\mathrm{C}_2$ 個である。したがって (1) より、求める個数は

$$ \sum_{s=3}^{n-1} {}_{s-1}\mathrm{C}_2 = \sum_{k=2}^{n-2} {}_k\mathrm{C}_2 = {}_{n-1}\mathrm{C}_3. $$

(3) 和が $3n$ となる順序つきの正の整数の組は ${}_{3n-1}\mathrm{C}_2$ 個ある。三つとも等しい組は (n,n,n) の 1 個である。ちょうど二つが等しい組を (u,u,v) の並べ替えとして数える。$v = 3n-2u > 0$ かつ $u \neq n$ より、u の選び方の数を T とすると

$$ T = \begin{cases} 3n/2 - 2 & (n\text{が偶数}), \\ (3n-3)/2 & (n\text{が奇数}). \end{cases} $$

異なる値 v を置く位置が 3 通りなので、ちょうど二つが等しい組は $3T$ 個である。三つの値が異なる組の並べ替え 6 通りのうち、$x<y<z$ となるものは 1 通りである。よって求める個数は

$$ \frac{1}{6}\left\{ {}_{3n-1}\mathrm{C}_2 - 1 - 3T \right\} $$

であり、整理すると

$$ \begin{cases} \dfrac{3n^2-6n+4}{4} & (n\text{が偶数}), \\ \dfrac{3(n-1)^2}{4} & (n\text{が奇数}) \end{cases} $$

となる。

3 別解・背景

(2) では $w = n-x-y-z$ と置く方法もあります。条件は x, y, z, w が正の整数で $x+y+z+w=n$ となることと同値です。n 個の印の間に 3 本の仕切りを入れるため、直接 ${}_{n-1}\mathrm{C}_3$ と数えられます。(1) の和を使う解法と、和を固定する変数を加える解法を対応させておくとよいでしょう。

3　2026 年度 東京科学大学・東京工業大学・理系 第 3 問

【数学（理系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

a と b を正の実数とし，座標平面の 3 点 $O(0,0)$，$A(a,0)$，$B(0,b)$ を考える。AB の中点を C，AC の中点を P とし，$\triangle BCO$ の外心を Q とする。

(1) 2 点 P,Q のそれぞれの座標を a と b を用いて表せ。

(2) 2 点 O,A を通る直線上の点 R で，$\angle PRQ=\pi/2$ をみたすものすべてについて，それぞれの座標を a と b を用いて表せ。

(3) (2) の条件をみたす点 R で，$\triangle PQR\backsim\triangle ABO$，$\triangle QPR\backsim\triangle ABO$ のうち少なくとも一方が成り立つようなものをすべて求めよ。

1　解説

(1) 中点 C,P の座標は、それぞれ端点の座標の平均で求めます。外心 Q は、三角形の各頂点から等距離にある点です。まず B,O から等距離という条件を使うと、Q は BO の垂直二等分線 $y=b/2$ 上にあります。次に O,C から等距離という条件を使えば、残る x 座標を一つの方程式で求められます。$a>0$ なので、途中で a で割っても場合分けは増えません。

(2) R は線分 OA 上とは限らず、O,A を通る直線上の点です。$R=(t,0)$ と置いたとき、t に $0\leqq t\leqq a$ という制限を付けないでください。角が直角になる条件は、二つのベクトルの内積が 0 になることです。

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$$

とすれば、傾きが定義できない鉛直な辺も同じ式で扱えます。P,Q の y 座標はそれぞれ $b/4,b/2$ で正なので、R が P や Q と一致して角が定まらない心配もありません。

得られる t の二次式は二つの一次式の積に分けられます。二つの候補が一致するのは $b^2=2a^2$ の場合です。解の個数を述べるときに、この条件を添えます。

(3) 相似を表す頂点の順序を読み取ります。$\triangle PQR\sim\triangle ABO$ なら P,Q,R は A,B,O に対応するので、直角を挟む二辺の比は $PR:QR=a:b$ です。$\triangle QPR\sim\triangle ABO$ なら、必要な比は $QR:PR=a:b$ に変わります。両方とも直角三角形なので、この二辺の比が一致すれば相似です。

候補 $R_1=(a/4,0)$ では、距離の二乗を計算すると共通因子 $4a^2+b^2$ が現れます。平方根をすぐに展開せず比を取ると、$PR_1:QR_1=a:b$ となり、常に相似だと分かります。もう一つの候補 R_2 では $PR_2:QR_2=b:2a$ です。これを二通りの対応にそれぞれ照合すると、新しい点が追加されないことを示せます。

2 答案

(1) 中点の公式より

$$C=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right),\qquad P=\left(\frac{3a}{4},\frac{b}{4}\right).$$

$Q=(u,v)$ とすると $QB=QO$ より $v=b/2$ である。また $QO=QC$ より

$$u^2+\frac{b^2}{4}=\left(u-\frac{a}{2}\right)^2.$$

したがって

$$Q=\left(\frac{a^2-b^2}{4a},\frac{b}{2}\right).$$

(2) $R=(t,0)$ と置く。P,Q は x 軸上にないので、直角の条件は

$$\left(\frac{3a}{4}-t\right)\left(\frac{a^2-b^2}{4a}-t\right)+\frac{b^2}{8}=0.$$

左辺を因数分解すると

$$\left(t-\frac{a}{4}\right)\left(t-\frac{3a^2-b^2}{4a}\right)=0.$$

よって、求める点は

$$R_1=\left(\frac{a}{4},0\right),\qquad R_2=\left(\frac{3a^2-b^2}{4a},0\right).$$

ただし $b^2=2a^2$ のときは両点が一致する。

(3) R_1 について

$$PR_1^2=\frac{4a^2+b^2}{16},\qquad QR_1^2=\frac{b^2(4a^2+b^2)}{16a^2}.$$

したがって $PR_1:QR_1=a:b$ であり、直角を挟む二辺の比が等しいから $\triangle PQR_1\sim\triangle ABO$ である。

R_2 については

$$PR_2^2=\frac{b^2(a^2+b^2)}{16a^2},\qquad QR_2^2=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

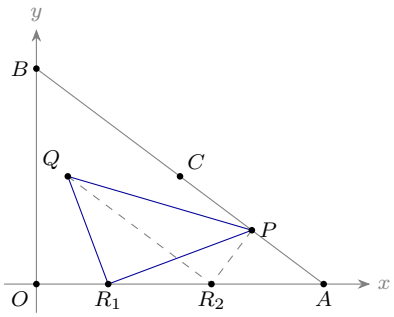
よって $PR_2:QR_2=b:2a$ である。これが $a:b$ に等しいための必要十分条件は $b^2=2a^2$ であり、この場合は $R_2=R_1$ である。一方、$QR_2:PR_2=2a:b$ が $a:b$ に等しくなることは、$a,b>0$ のもとではない。したがって求める点は、すべての場合に

$$R=\left(\frac{a}{4},0\right)$$

だけである。

3 別解・背景

直角の条件から、R は PQ を直径とする円と x 軸との交点でもあります。(2) の二つの解が一致する場合は、この円が x 軸に接しています。ただし相似の判定では、円に乗っていることだけでは足りません。(3) のように頂点の対応と辺の比を確かめます。



配置の一例（$a=4,\ b=3$）

2026 年度 東京科学大学・東京工業大学・理系 第 4 問

【数学（理系）第 4 問】〈2026 年度・前期日程〉

i を虚数単位とする。実数 θ に対して複素数 $e(\theta)$ を $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ で定める。正の整数 n に対し，複素数平面上の点 $e((n-1)\pi/3)$ と点 $e(n\pi/3)$ を通る直線を l_n とする。複素数 z に対し，直線 l_n に関して点 z と対称な位置にある点を表す複素数を $R_n(z)$ とする。

(1) 複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ とする。このとき，$R_n(z)=e(\theta_1)\bar{z}+\sqrt{3}\,e(\theta_2)$ をみたす実数 θ_1,θ_2 をそれぞれ n を用いて表せ。

(2) 実数 a,b に対して，$z_1=a+bi$，$z_{n+1}=R_n(z_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ で定められる複素数の列 $\{z_n\}$ の一般項を求めよ。

1　解説

(1) 実軸に関する対称移動は、複素数 z を共役複素数 $\bar{z}$ へ移します。原点を通り、実軸となす角が ϕ の直線に関する対称移動は、いったん $-\phi$ だけ回転してその直線を実軸に重ね、共役を取り、ϕ だけ回転して戻すことで表せます。したがって、その式は

$$e(\phi)\overline{e(-\phi)z}=e(2\phi)\bar{z}$$

です。本問の直線は原点を通らないので、直線上の点を原点へ移す操作も加えます。

単位円の隣り合う二頂点を結ぶ弦 l_n について、その中点を w_n とします。中点の偏角は両端の偏角の平均 $t_n=(2n-1)\pi/6$、原点からの距離は $\sqrt{3}/2$ です。弦は中点へ向かう半径と垂直なので、直線の方向角には $\phi_n=t_n+\pi/2=(n+1)\pi/3$ を使えます。平行移動と回転の順序を保って書くと

$$R_n(z)=w_n+e(2\phi_n)\overline{z-w_n}$$

となります。ここから $\bar{z}$ の係数と定数項を読み取ります。

(2) 反射する直線は、一回ごとに $\pi/3$ ずつ回っています。そのまま $z_2,z_3,\ldots$ を求めると、回転と共役が混ざり、式が長くなります。この回転に合わせて座標を戻すことを考えましょう。

指針　**回転を取り除いた数列を作る**

$u_n=e(-(n-1)\pi/3)z_n$ と置く。$z_n=e((n-1)\pi/3)u_n$ を代入し、共役を取ると角度の符号が変わることに注意する。

この置換では $u_1=z_1=a+bi$ です。(1) の式へ代入すると、$\bar{u}_n$ の係数の偏角は

$$-\frac{n\pi}{3}+\frac{2(n+1)\pi}{3}-\frac{(n-1)\pi}{3}=\pi$$

となり、n を含まない -1 に変わります。定数項の偏角も $-\pi/6$ にそろうので、

$$u_{n+1}=-\bar{u}_n+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

という一定の規則になります。

$u_n=s_n+it_n$ と実部・虚部に分けると、$s_{n+1}=-s_n+3/2$、$t_{n+1}=t_n-\sqrt{3}/2$ です。実部は $3/4$ を中心に符号が交互に変わり、虚部は等差数列になります。二つを求めてから回転を戻すと、偶奇や 6 で割った余りによる場合分けを増やさずに一般項を表せます。

2 答案

(1) $t_n = (2n-1)\pi/6$ と置くと、弦 l_n の中点と方向角は

$$w_n = \frac{\sqrt{3}}{2}e(t_n), \qquad \phi_n = t_n + \frac{\pi}{2} = \frac{n+1}{3}\pi.$$

実軸に関する反射が共役を取る操作であることから

$$\begin{aligned} R_n(z) &= w_n + e(\phi_n)\overline{e(-\phi_n)(z-w_n)} \\ &= e(2\phi_n)\bar{z} + w_n - e(2\phi_n)\bar{w}_n. \end{aligned}$$

$2\phi_n = 2t_n + \pi$ なので $e(2\phi_n)\bar{w}_n = -w_n$ である。よって

$$R_n(z) = e\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\bar{z} + \sqrt{3}e\left(\frac{(2n-1)\pi}{6}\right).$$

したがって、例えば

$$\theta_1 = \frac{2(n+1)\pi}{3}, \qquad \theta_2 = \frac{(2n-1)\pi}{6}$$

と取ればよい。

(2) $u_n = e(-(n-1)\pi/3)z_n$ と置くと、(1) より

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e(-n\pi/3)R_n\big(e((n-1)\pi/3)u_n\big) \\ &= -\bar{u}_n + \sqrt{3}e(-\pi/6) \\ &= -\bar{u}_n + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

$u_n = s_n + it_n$（s_n, t_n は実数）と置くと

$$s_{n+1} - \frac{3}{4} = -\left(s_n - \frac{3}{4}\right), \qquad t_{n+1} = t_n - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$u_1 = a + bi$ より

$$s_n = \frac{3}{4} + (-1)^{n-1}\left(a - \frac{3}{4}\right), \qquad t_n = b - \frac{(n-1)\sqrt{3}}{2}.$$

よって、求める一般項は

$$z_n = e\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right)\left\{\frac{3}{4} + (-1)^{n-1}\left(a - \frac{3}{4}\right) + \left(b - \frac{(n-1)\sqrt{3}}{2}\right)i\right\}.$$

3 別解・背景

$u_{n+1} = -\bar{u}_n + 3/2 - \sqrt{3}i/2$ を二度使うと、$u_{n+2} = u_n - \sqrt{3}i$ です。偶数番目と奇数番目に分ければ、それぞれ虚軸方向の等差数列としても求められます。また $e(\theta + 2\pi) = e(\theta)$ なので、(1) の角度には整数倍の 2π を加えても同じ反射を表します。