大学入試過去問シリーズ

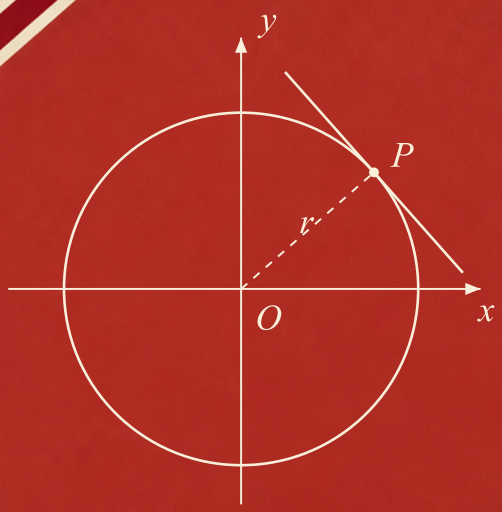
東北大学

文系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

東北大学

文系数学

2017～2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、東北大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	10
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	18
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	26
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	34
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	42
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	50
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	58
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	66
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	74

分野索引 …… 82

2026 年度 東北大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 u に対し，放物線 C の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ。

(2) 正の実数 u に対し，放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものを $l_1,\ l_2$ とする。放物線 C と直線 l_1 の接点を P_1 とし，放物線 C と直線 l_2 の接点を P_2 とする。このとき，線分 P_1P_2 の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ。また，u が正の実数全体を動くとき，直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と，それを与える u の値を求めよ。

1 解説

(1) は接点を未知数として、全ての接線を漏れなく表します。放物線の接点を (v, v^2) とすれば接線は $y = 2vx - v^2$ です。指定点を通る条件は $v^2 - 2uv + u - 1 = 0$、判別式は $4\{(u-1/2)^2 + 3/4\} > 0$ となり、どの正の u でも二つの異なる実数解をもちます。異なる v は傾き $2v$ も異なるため、同じ接線を二回表しているのではありません。接線の式の全体と根の一対一の対応で、ちょうど二本と示せます。

(2) では二接点を根号で明示する必要はありません。接点の横座標 v_1, v_2 の和は $2u$、積は $u-1$ と分かっています。二点を結ぶ弦の傾きは $(v_1^2 - v_2^2)/(v_1 - v_2) = v_1 + v_2 = 2u$ です。分母が零でないことは (1) で保証されます。また $u > 0$ なので弦は水平でも垂直でもなく、垂直二等分線の傾きが $-1/(2u)$ と有限に定まります。

中点の横座標は u、縦座標は二つの平方の平均です。$v_1^2 + v_2^2 = (v_1 + v_2)^2 - 2v_1v_2$ を使うと、平均は $2u^2 - u + 1$ になります。根を個別に求めると平方根同士の積や相殺が必要ですが、対称な量を和と積で表すと、この計算をまとめられます。

中点を通る傾きの式は $y - (2u^2 - u + 1) = -(x - u)/(2u)$ です。縦の直線ではないので $x = 0$ を代入した点が必ず一つ存在し、これが y 軸との交点です。代入時には右辺が $1/2$ となるので、$q(u) = 2u^2 - u + 3/2$ を得ます。中点の縦座標をそのまま交点の高さとしないよう、横方向に u 戻した分も加えます。

平方完成して $q(u) = 2(u - 1/4)^2 + 11/8$ です。平方項が零になる $u = 1/4$ は指定の正の範囲に入るため、最小値 $11/8$ は実際に達成されます。正の範囲の端を極限で調べるだけではなく、平方完成の中心が許されるかを確認することが必要です。

正の条件は交点の定まり方にも関係します。仮に $u = 0$ を入れると、接点は $(-1, 1), (1, 1)$ で、弦の垂直二等分線は y 軸そのものになります。交点の高さが一つには定まらず、今回の $q(u)$ の定義と同じ状況ではありません。問題でこの値が除かれているため、傾きで式を立てて一つの高さを最小化できるのです。

指定点は、同じ横座標の放物線の点より常に下にあります。その縦の差が $u^2 - (u-1) = u^2 - u + 1$ で、判別式の四分の一と一致します。平方完成して正と示した計算には、この位置関係も表れています。接点を直接解く代わりに判別式を調べると、点の位置と接線の本数を一つの式で確認できます。

2 答案

(1) 放物線 $y=x^2$ 上の点を (v,v^2) とする。この点における接線は，$y=2v(x-v)+v^2=2vx-v^2$ である。この接線が点 $(u,u-1)$ を通るための条件は $u-1=2uv-v^2$ すなわち $v^2-2uv+u-1=0$ である。

この 2 次方程式の判別式は

$$(-2u)^2-4(u-1)=4(u^2-u+1)=4\left\{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}>0$$

であるから，この方程式は相異なる 2 実根をもつ。各根 v に対して接線 $y=2vx-v^2$ が一意に定まり，相異なる根からは傾きの異なる接線が得られる。したがって，条件を満たす接線はちょうど 2 本である。

(2) 2 つの根を v_1,v_2 とおくと，根と係数の関係より $v_1+v_2=2u,\qquad v_1v_2=u-1$ である。

2 つの接点を $P_1=(v_1,v_1^2),\qquad P_2=(v_2,v_2^2)$ とする。線分 P_1P_2 の傾きは $\frac{v_1^2-v_2^2}{v_1-v_2}=v_1+v_2=2u$ である。したがって，その垂直二等分線の傾きは $-\frac{1}{2u}$ である。ここで $u>0$ なので，この値は定義できる。

次に，線分 P_1P_2 の中点を M とする。中点の座標は $M=\left(\frac{v_1+v_2}{2},\frac{v_1^2+v_2^2}{2}\right)$ であり，$\frac{v_1+v_2}{2}=u$ また

$$\frac{v_1^2+v_2^2}{2}=\frac{(v_1+v_2)^2-2v_1v_2}{2}=\frac{4u^2-2(u-1)}{2}=2u^2-u+1$$

である。よって $M=(u,2u^2-u+1)$ である。

垂直二等分線は点 M を通り，傾き $-1/(2u)$ をもつので，$y-(2u^2-u+1)=-\frac{1}{2u}(x-u)$ と表される。この直線と y 軸との交点では $x=0$ であるから，その y 座標を $q(u)$ とすると $q(u)=2u^2-u+1+\frac{1}{2}=2u^2-u+\frac{3}{2}$ である。

これを平方完成すると，$q(u)=2\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{8}$ となる。条件 $u>0$ の範囲に $u=1/4$ は含まれる。したがって，$q(u)$ の最小値は $\frac{11}{8}$ であり，それを与えるのは $u=\frac{1}{4}$ である。

2026 年度 東北大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

以下の問いに答えよ。

(1) $a^2+2b^2=c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ。なお，解答は答えのみでよい。

(2) $a^2+2b^2=c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は無数に存在することを示せ。

(3) 正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は $a^2+2b^2=c^2$ を満たすとする。このとき，$a+c$ および b は偶数であることを示せ。さらに，もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ。

1　解説

(1) は小さい正の整数を試し、$1^2+2\cdot 2^2=9=3^2$ から $(1,2,3)$ が使えます。答えだけという指定なので、答案ではこの組だけを記します。(2) ではこの一組を使い、三つを同時に正整数 m 倍します。全ての項が二乗なので左辺も右辺も m^2 倍になり、$(m,2m,3m)$ は必ず条件を満たします。倍率を変えれば第一成分も変わり別の組になるため、互いに異なる解を無数に作れます。

無数の組を示すには、あらゆる解を分類する必要はありません。この構成で条件を満たすことと、別々の倍率が同じ組にならないことを示せば十分です。一つの成分だけを大きくすると等式は保たれないので、二乗で統一された三成分を同時に倍にすることがポイントです。

(3) は式を因数分解して全部の解を探すより、平方数の偶奇と余りを使います。偶数の平方は偶数、奇数の平方は奇数です。$2b^2$ は偶数なので等式から a^2,c^2 の偶奇が一致し、a,c の偶奇も一致します。両方が奇数か両方が偶数だから、$a+c$ は偶数となります。

次に四で割った余りを調べます。偶数 $2k$ の平方は四の倍数、奇数 $2k+1$ の平方は $4k(k+1)+1$ で一余ります。a,c の偶奇が一致するため、どちらの場合も c^2-a^2 は四の倍数です。従って $2b^2$ が四の倍数となります。もし b が奇数なら b^2 は一余り、$2b^2$ は二余って矛盾するので、b は偶数です。余りの式を二で割る際の解釈も、この場合分けで確実になります。

最後は a,c が偶数という追加条件を使います。先ほどの結論は全ての正整数解に対するものなので、b も偶数です。三つを二で割って正の整数 a_1,b_1,c_1 にすると、元の等式は四で割れ、$a_1^2+2b_1^2=c_1^2$ になります。この新しい解にも、全解に示した「中央の数は偶数」という結論を適用できます。

従って b_1 は偶数で、元の $b=2b_1$ は四の倍数です。これは、これから示す結論を途中で仮定する循環ではありません。既に全解について証明した偶数性を、別の正整数解へ再利用しています。例として $(2,4,6)$ は三つとも偶数の解で中央は四の倍数です。一方 $(1,2,3)$ は a,c が奇数なので、中央が偶数であるだけで、四の倍数でないことは主張と矛盾しません。

2 答案

(1) $(a,b,c)=(1,2,3)$。

(2) (1) の解を正整数 m 倍して $(a,b,c)=(m,2m,3m)$ とおく。このとき $a^2+2b^2=m^2+2(2m)^2=m^2+8m^2=9m^2=(3m)^2=c^2$ である。$m=1,2,3,\ldots$ と変えると互いに異なる正整数解が得られるので，条件を満たす正整数の組は無限に存在する。

(3) まず，等式 $a^2+2b^2=c^2$ を 2 で割った余りで考える。平方数は 2 で割ると 0 または 1 であり，$2b^2$ は常に偶数である。したがって $a^2\equiv c^2 \pmod 2$ であり，a と c の偶奇は一致する。ゆえに $a+c$ は偶数である。a,c が奇数であるとする。奇数の平方は 4 で割ると 1 余るので，$a^2\equiv c^2\equiv 1 \pmod 4$ である。もとの等式より $2b^2=c^2-a^2$ であり，右辺は 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ，b^2 は偶数である。したがって b は偶数である。

次に，a,c が偶数であるとする。この場合も $2b^2=c^2-a^2$ であり，右辺は偶数の平方どうしの差だから 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ，b^2 は偶数，したがって b は偶数である。

以上より，a,c の偶奇にかかわらず，条件を満たす正整数解では b は偶数である。

ここで，a,c がともに偶数であると仮定する。上で示したことから b も偶数である。そこで $a=2a_1,\quad b=2b_1,\quad c=2c_1$ とおくと，a_1,b_1,c_1 は正整数であり，もとの等式は $(2a_1)^2+2(2b_1)^2=(2c_1)^2$ すなわち $a_1^2+2b_1^2=c_1^2$ となる。この新しい正整数解 (a_1,b_1,c_1) に対して，すでに示した結論を適用すると，b_1 は偶数である。したがって $b=2b_1$ は 4 の倍数である。