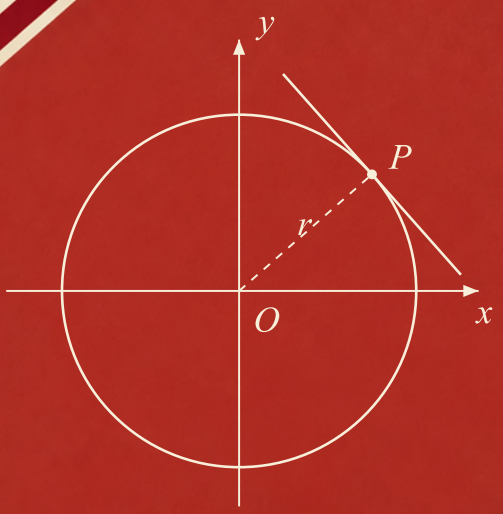
東北大学

理系（前期・後期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

東北大学

理系数学

2017〜2026 年度　前期・後期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、東北大学の前期・後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

共通問題も、各区分における小問の順序と番号に従います。旧課程の選択問題や京都大学の理系甲・乙は、元の区分を併記します。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）、後期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	1
2025 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	26
2024 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	51
2023 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	78
2022 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	104
2021 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	129
2020 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	153
2019 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	177
2018 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	201
2017 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問、後期 第 4 問、後期 第 5 問、後期 第 6 問	227

分野索引 …… 251

2026 年度 東北大学・理系 第 1 問（前期）

【数学（理系）第 1 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 u に対し，放物線 C の接線で点 $(u,\, u-1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ。

(2) 正の実数 u に対し，放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u,\, u-1)$ を通るものを $l_1,\, l_2$ とする。放物線 C と直線 l_1 の接点を P_1 とし，放物線 C と直線 l_2 の接点を P_2 とする。このとき，線分 P_1P_2 の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ。また，u が正の実数全体を動くとき，直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と，それを与える u の値を求めよ。

解説

(1) は接点を未知数として、全ての接線を漏れなく表します。放物線の接点を (v, v^2) とすれば接線は $y = 2vx - v^2$ です。指定点を通る条件は $v^2 - 2uv + u - 1 = 0$、判別式は $4\{(u-1/2)^2 + 3/4\} > 0$ となり、どの正の u でも二つの異なる実数解をもちます。異なる v は傾き $2v$ も異なるため、同じ接線を二回表しているのではありません。接線の式の全体と根の一対一の対応で、ちょうど二本と示せます。

(2) では二接点を根号で明示する必要はありません。接点の横座標 v_1, v_2 の和は $2u$、積は $u-1$ と分かっています。二点を結ぶ弦の傾きは $(v_1^2 - v_2^2)/(v_1 - v_2) = v_1 + v_2 = 2u$ です。分母が零でないことは (1) で保証されます。また $u > 0$ なので弦は水平でも垂直でもなく、垂直二等分線の傾きが $-1/(2u)$ と有限に定まります。

中点の横座標は u、縦座標は二つの平方の平均です。$v_1^2 + v_2^2 = (v_1 + v_2)^2 - 2v_1v_2$ を使うと、平均は $2u^2 - u + 1$ になります。根を個別に求めると平方根同士の積や相殺が必要ですが、対称な量を和と積で表すと、この計算をまとめられます。

中点を通る傾きの式は $y - (2u^2 - u + 1) = -(x - u)/(2u)$ です。縦の直線ではないので $x = 0$ を代入した点が必ず一つ存在し、これが y 軸との交点です。代入時には右辺が $1/2$ となるので、$q(u) = 2u^2 - u + 3/2$ を得ます。中点の縦座標をそのまま交点の高さとしないよう、横方向に u 戻した分も加えます。

平方完成して $q(u) = 2(u - 1/4)^2 + 11/8$ です。平方項が零になる $u = 1/4$ は指定の正の範囲に入るため、最小値 $11/8$ は実際に達成されます。正の範囲の端を極限で調べるだけではなく、平方完成の中心が許されるかを確認することが必要です。

正の条件は交点の定まり方にも関係します。仮に $u = 0$ を入れると、接点は $(-1, 1), (1, 1)$ で、弦の垂直二等分線は y 軸そのものになります。交点の高さが一つには定まらず、今回の $q(u)$ の定義と同じ状況ではありません。問題でこの値が除かれているため、傾きで式を立てて一つの高さを最小化できるのです。

指定点は、同じ横座標の放物線の点より常に下にあります。その縦の差が $u^2 - (u-1) = u^2 - u + 1$ で、判別式の四分の一と一致します。平方完成して正と示した計算には、この位置関係も表れています。接点を直接解く代わりに判別式を調べると、点の位置と接線の本数を一つの式で確認できます。

2 答案

(1) 放物線 $y=x^2$ 上の点を (v, v^2) とする。この点における接線は，$y=2v(x-v)+v^2=2vx-v^2$ である。この接線が点 $(u, u-1)$ を通るための条件は $u-1=2uv-v^2$ すなわち $v^2-2uv+u-1=0$ である。

この 2 次方程式の判別式は

$$(-2u)^2-4(u-1)=4(u^2-u+1)=4\left\{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}>0$$

であるから，この方程式は相異なる 2 実根をもつ。各根 v に対して接線 $y=2vx-v^2$ が一意に定まり，相異なる根からは傾きの異なる接線が得られる。したがって，条件を満たす接線はちょうど 2 本である。

(2) 2 つの根を v_1, v_2 とおくと，根と係数の関係より $v_1+v_2=2u, \quad v_1v_2=u-1$ である。

2 つの接点を $P_1=(v_1, v_1^2), \quad P_2=(v_2, v_2^2)$ とする。線分 P_1P_2 の傾きは $\frac{v_1^2-v_2^2}{v_1-v_2}=v_1+v_2=2u$ である。したがって，その垂直二等分線の傾きは $-\frac{1}{2u}$ である。ここで $u>0$ なので，この値は定義できる。

次に，線分 P_1P_2 の中点を M とする。中点の座標は $M=\left(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1^2+v_2^2}{2}\right)$ であり，$\frac{v_1+v_2}{2}=u$ また

$$\frac{v_1^2+v_2^2}{2}=\frac{(v_1+v_2)^2-2v_1v_2}{2}=\frac{4u^2-2(u-1)}{2}=2u^2-u+1$$

である。よって $M=(u, 2u^2-u+1)$ である。

垂直二等分線は点 M を通り，傾き $-1/(2u)$ をもつので，$y-(2u^2-u+1)=-\frac{1}{2u}(x-u)$ と表される。この直線と y 軸との交点では $x=0$ であるから，その y 座標を $q(u)$ とすると $q(u)=2u^2-u+1+\frac{1}{2}=2u^2-u+\frac{3}{2}$ である。

これを平方完成すると，$q(u)=2\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{8}$ となる。条件 $u>0$ の範囲に $u=1/4$ は含まれる。したがって，$q(u)$ の最小値は $\frac{11}{8}$ であり，それを与えるのは $u=\frac{1}{4}$ である。

2026 年度 東北大学・理系 第 2 問（前期）

【数学（理系）第 2 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

以下の問いに答えよ。

(1) $a^2+2b^2=c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ。なお，解答は答えのみでよい。

(2) $a^2+2b^2=c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は無数に存在することを示せ。

(3) 正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は $a^2+2b^2=c^2$ を満たすとする。このとき，$a+c$ および b は偶数であることを示せ。さらに，もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ。

解説

(1) は小さい正の整数を試し、$1^2+2\cdot2^2=9=3^2$ から $(1,2,3)$ が使えます。答えだけという指定なので、答案ではこの組だけを記します。(2) ではこの一組を使い、三つを同時に正整数 m 倍します。全ての項が二乗なので左辺も右辺も m^2 倍になり、$(m,2m,3m)$ は必ず条件を満たします。倍率を変えれば第一成分も変わり別の組になるため、互いに異なる解を無数に作れます。

無数の組を示すには、あらゆる解を分類する必要はありません。この構成で条件を満たすことと、別々の倍率が同じ組にならないことを示せば十分です。一つの成分だけを大きくすると等式は保たれないので、二乗で統一された三成分を同時に倍にすることがポイントです。

(3) は式を因数分解して全部の解を探すより、平方数の偶奇と余りを使います。偶数の平方は偶数、奇数の平方は奇数です。$2b^2$ は偶数なので等式から a^2,c^2 の偶奇が一致し、a,c の偶奇も一致します。両方が奇数か両方が偶数だから、$a+c$ は偶数となります。

次に四で割った余りを調べます。偶数 $2k$ の平方は四の倍数、奇数 $2k+1$ の平方は $4k(k+1)+1$ で一余ります。a,c の偶奇が一致するため、どちらの場合も c^2-a^2 は四の倍数です。従って $2b^2$ が四の倍数となります。もし b が奇数なら b^2 は一余り、$2b^2$ は二余って矛盾するので、b は偶数です。余りの式を二で割る際の解釈も、この場合分けで確実になります。

最後は a,c が偶数という追加条件を使います。先ほどの結論は全ての正整数解に対するものなので、b も偶数です。三つを二で割って正の整数 a_1,b_1,c_1 にすると、元の等式は四で割れ、$a_1^2+2b_1^2=c_1^2$ になります。この新しい解にも、全解に示した「中央の数は偶数」という結論を適用できます。

従って b_1 は偶数で、元の $b=2b_1$ は四の倍数です。これは、これから示す結論を途中で仮定する循環ではありません。既に全解について証明した偶数性を、別の正整数解へ再利用しています。例として $(2,4,6)$ は三つとも偶数の解で中央は四の倍数です。一方 $(1,2,3)$ は a,c が奇数なので、中央が偶数であるだけで、四の倍数でないことは主張と矛盾しません。

2 答案

(1) $(a,b,c)=(1,2,3)$。

(2) (1) の解を正整数 m 倍して $(a,b,c)=(m,2m,3m)$ とおく。このとき $a^2+2b^2=m^2+2(2m)^2=m^2+8m^2=9m^2=(3m)^2=c^2$ である。$m=1,2,3,\ldots$ と変えると互いに異なる正整数解が得られるので，条件を満たす正整数の組は無限に存在する。

(3) まず，等式 $a^2+2b^2=c^2$ を 2 で割った余りで考える。平方数は 2 で割ると 0 または 1 であり，$2b^2$ は常に偶数である。したがって $a^2\equiv c^2 \pmod 2$ であり，a と c の偶奇は一致する。ゆえに $a+c$ は偶数である。a,c が奇数であるとする。奇数の平方は 4 で割ると 1 余るので，$a^2\equiv c^2\equiv 1 \pmod 4$ である。もとの等式より $2b^2=c^2-a^2$ であり，右辺は 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ，b^2 は偶数である。したがって b は偶数である。

次に，a,c が偶数であるとする。この場合も $2b^2=c^2-a^2$ であり，右辺は偶数の平方どうしの差だから 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ，b^2 は偶数，したがって b は偶数である。

以上より，a,c の偶奇にかかわらず，条件を満たす正整数解では b は偶数である。

ここで，a,c がともに偶数であると仮定する。上で示したことから b も偶数である。そこで $a=2a_1,\quad b=2b_1,\quad c=2c_1$ とおくと，a_1,b_1,c_1 は正整数であり，もとの等式は $(2a_1)^2+2(2b_1)^2=(2c_1)^2$ すなわち $a_1^2+2b_1^2=c_1^2$ となる。この新しい正整数解 (a_1,b_1,c_1) に対して，すでに示した結論を適用すると，b_1 は偶数である。したがって $b=2b_1$ は 4 の倍数である。

3 2026 年度 東北大学・理系 第 3 問（前期）

【数学（理系）第 3 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

a, b, c, d は実数とし，実数全体を定義域とする関数

$$f(x)=\begin{cases}8x^3-6x^2+2 & (|x|\leqq 1\text{のとき})\\ 3x^4+ax^3+bx^2+cx+d & (|x|>1\text{のとき})\end{cases}$$

はすべての x の値で微分可能であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c, d の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の最小値と，それを与える x の値を求めよ。

1 解説

区間ごとの多項式はその内部では微分可能なので、(1) で確認すべきなのは式が切り替わる二端です。内側を $p(x)$、外側を $q(x)$ と呼び、$x=1,-1$ で関数値と左右の微分係数をそれぞれ一致させます。微分可能なら連続でもあるため、導関数の値だけを合わせて関数の飛びを残すことはできません。外側の式は端で実際に使われませんが、多項式を延長して計算した値が、その側からの極限です。

内側の端値は $p(1)=4, p(-1)=-12$、導関数は $p'(x)=24x^2-12x$ で $p'(1)=12, p'(-1)=36$ です。外側の同じ四値を等置すれば、四未知数に四つの一次条件を得ます。一と負一での式を加減すると、奇数次の項と偶数次の項が分かれるため、連立を解きやすくなります。

導関数の二式の差から $4b=-48$、関数値の二式の差から $a+c=8$ です。$b=-12$ を導関数の式へ戻すと $3a+c=24$ なので、差から $a=8, c=0$、最後に $d=5$ です。これらは四条件全部を満たし、左右の値と傾きがそろうので、二端でも実際に微分可能となります。

(2) は中央の閉区間と、左右の外側の開区間を分けて最小値を比較します。中央の候補は導関数が零となる $0, 1/2$ と両端 $-1, 1$ です。各値は順に二、3/2、負十二、四なので中央の最小は負十二です。区間の内部の停留点だけでなく、実際に含む端も比較します。

外側の導関数は $12x(x^2+2x-2)$、零点は $0, -1\pm\sqrt{3}$ ですが、外側に入るのは $s=-1-\sqrt{3}$ だけです。右側は一以上で導関数が正なので中央の右端四より小さい値を取りません。左側は s まで減少し、それ以後 -1 まで増加するので、左側の最小はこの点で達成されます。

値の計算は根号を四乗まで展開するより、停留点が満たす $s^2=-2s+2$ を使います。掛けては同じ関係を代入し、$s^3=6s-4, s^4=-16s+12$ と下げると、外側の値は $24s-15$ にまとまります。従って値は $-39-24\sqrt{3}$、中央の負十二より明らかに小さく、これが全体の最小です。

外側の端が開いていても、全体の関数は中央で同じ端値を取っています。外側を閉区間として扱って別の値を採用する必要はなく、接続を確認した四条件がこの比較にも役立ちます。式の使用範囲から除かれた停留点を候補へ混ぜないことが、正しい全体の最小を選ぶ要点です。

2 答案

(1) $-1 \leqq x \leqq 1$ での式を $p(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2$ とおき，$|x| > 1$ での式を $q(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。$f(x)$ がすべての実数で微分可能であるためには，$x = 1$ と $x = -1$ で値と導関数が一致しなければならない。

まず $p(1) = 8 - 6 + 2 = 4$，　$p'(x) = 24x^2 - 12x$，　$p'(1) = 12$ である。また $p(-1) = -8 - 6 + 2 = -12$，　$p'(-1) = 24 + 12 = 36$ である。

一方，$q'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$ である。したがって接続条件は $q(1) = p(1)$，　$q'(1) = p'(1)$，　$q(-1) = p(-1)$，　$q'(-1) = p'(-1)$ であり，具体的には

$$\begin{cases} 3 + a + b + c + d = 4, \\ 12 + 3a + 2b + c = 12, \\ 3 - a + b - c + d = -12, \\ -12 + 3a - 2b + c = 36 \end{cases}$$

である。整理すると

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1, \\ 3a + 2b + c = 0, \\ -a + b - c + d = -15, \\ 3a - 2b + c = 48 \end{cases}$$

となる。第 2 式と第 4 式の差をとると $4b = -48$ だから $b = -12$ である。第 2 式より $3a - 24 + c = 0$ すなわち $c = 24 - 3a$ である。第 1 式と第 3 式の差をとると $2a + 2c = 16$ だから $a + c = 8$ である。ここに $c = 24 - 3a$ を代入して $a + 24 - 3a = 8$ より $a = 8$，　$c = 0$ を得る。最後に第 1 式から $8 - 12 + 0 + d = 1$ であるから $d = 5$ である。よって $a = 8$，　$b = -12$，　$c = 0$，　$d = 5$ である。

(2) このとき外側の式は $q(x) = 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 5$ である。最小値を求める。

まず $-1 \leqq x \leqq 1$ では $p'(x) = 24x^2 - 12x = 12x(2x - 1)$ である。臨界点は $x = 0$，　$x = \frac{1}{2}$ であり，端点も含めて値を調べると

$$p(-1) = -12, \qquad p(0) = 2, \qquad p\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{3}{2}, \qquad p(1) = 4$$

である。したがって内側での最小値は -12 である。

次に $|x| > 1$ では $q'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 24x = 12x(x^2 + 2x - 2)$ である。方程式 $q'(x) = 0$ の解は $x = 0$，　$x = -1 \pm \sqrt{3}$ である。このうち $|x| > 1$ に入るのは $x = -1 - \sqrt{3}$ だけである。さらに $q'(x)$ は $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ で負，$(-1 - \sqrt{3}, -1)$ で正，$(1, \infty)$ で正である。したがって外側の左の区間では $x = -1 - \sqrt{3}$ が最小点であり，右の区間では単調増加である。

また，$q(x) \to \infty$ $(x \to \pm\infty)$ であり，外側の区間で最小値の候補になるのは，つなぎ目の値とこの臨界点の値である。つなぎ目では $q(1) = 4$，　$q(-1) = -12$ である。$r = \sqrt{3}$ とおき，$x = -1 - r$ とする。臨界点では $x^2 + 2x - 2 = 0$ だから $x^2 = -2x + 2$ である。これを用いて高次の項を下げると，$x^3 = x(-2x + 2) = -2x^2 + 2x = -2(-2x + 2) + 2x = 6x - 4$ さらに $x^4 = x(6x - 4) = 6x^2 - 4x = 6(-2x + 2) - 4x = -16x + 12$ である。したがって $q(x) = 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 5$ に代入すると，$q(x) = 3(-16x + 12) + 8(6x - 4) - 12(-2x + 2) + 5$ であり，$q(x) = (-48x + 36) + (48x - 32) + (24x - 24) + 5 = 24x - 15$ となる。$x = -1 - \sqrt{3}$ なので $q(-1 - \sqrt{3}) = 24(-1 - \sqrt{3}) - 15 = -39 - 24\sqrt{3}$ である。

これは -12 より小さい。よって $f(x)$ の最小値は $-39 - 24\sqrt{3}$ であり，そのときの x は $x = -1 - \sqrt{3}$ である。

2026 年度 東北大学・理系 第 4 問（前期）

【数学（理系）第 4 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

座標平面において，x 座標も y 座標も整数である点全体の集合上を移動する点 P がある。時刻 0 に点 P は原点 O にある。0 以上の整数 t に対し，時刻 t に点 P が点 (m, n) にあるとき，時刻 $t+1$ での点 P の位置は 4 点

$$(m+1, n),\quad (m-1, n),\quad (m, n+1),\quad (m, n-1)$$

のいずれかであり，また，どの位置にある確率も $\dfrac{1}{4}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 8 に点 P が点 $(4, 0)$ にある確率を求めよ。

(2) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2 - y^2 = 16$ 上にある確率を求めよ。

(3) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2-y^2 = 16$ 上にあるとき，時刻 1，時刻 2，…，時刻 7 のいずれかに点 P が点 $(4, 2)$ にある条件付き確率を求めよ。

解説

一歩の四方向は同じ確率で、八歩の各並びも 4^{-8} です。従って経路を数えて同じ全経路数で割れます。右、左、上、下の回数を R, L, U, D とすると、合計八、座標は $(R-L, U-D)$ です。(1) の $(4,0)$ では $R = L+4, U = D$、合計から $L+D = 2$ となります。非負整数の組は $(0,2), (1,1), (2,0)$ の三つだけです。

それぞれの回数を八位置へ並べる数は $8!/(R!L!U!D!)$ です。同じ方向の移動を区別して八の階乗だけを使わないようにします。三場合は 420、336、28 通りで合計 784、確率は $784/4^8 = 49/4096$ です。回数の組が異なるので足しても重複しません。

(2) は双曲線上の整数点を因数で求めます。$r = x-y, s = x+y$ と置くと $rs = 16$、逆に $x = (r+s)/2, y = (s-r)/2$ です。座標が整数になるには二因子の偶奇が同じでなければならず、一と十六のような組は除きます。積が正なので二因子は同符号、残る正の組は $(2,8), (4,4), (8,2)$ とその両方を負にしたものです。

これで $(\pm4, 0), (\pm5, \pm3)$ の六点が得られます。どれも八歩以内の距離で、座標和の偶奇も合います。四と零の型は左右対称で (1) の 784 通りずつです。五と三の型は最短距離が既に八なので、逆向きの移動は挟めず、五回と三回の順の ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通りです。四つの符号の組で同数となり、合計 1792 経路、確率 $7/256$ です。

(3) は条件付きなので、分母は全経路ではなく、この 1792 経路になります。途中で $(4,2)$ へ着くには最短でも六歩で、座標和の偶奇が一歩ごとに変わるため到達時刻は偶数です。指定された一から七の途中時刻では、六だけが候補です。これで異なる時刻の通過を重複して数える必要がなくなります。

六歩でその点へ着く経路は右四回と上二回だけで、${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通りです。残る二歩で双曲線上へ着ける点は $(4,0)$ と $(5,3)$ だけです。他の四候補はこの点からの距離が二を超えます。前者へは下、下の一通り、後者へは右、上または上、右の二通りなので、後半は三通りです。

どの前半にもこの三つの後半を続けられるため、条件を満たす全経路は $15\cdot3 = 45$ 通りです。終点の条件も満たしているので、求める比は $45/1792$ です。途中で特定点にいる無条件確率をそのまま使ったり、終点の確率と独立として掛けたりせず、前半と許された後半を組にして数えることで条件付けを正しく反映できます。

2 答案

各移動で右，左，上，下のいずれかに 1 だけ進む。8 回の移動におけるそれぞれの回数を R, L, U, D とすると，$R+L+U+D=8$，　$x=R-L$，　$y=U-D$ である。また，そのような回数の並べ方は $\frac{8!}{R!L!U!D!}$ 通りである。

(1) 最終位置が $(4,0)$ であるためには $R-L=4$，　$U-D=0$，　$R+L+U+D=8$ が必要である。$R=L+4$，$U=D$ とおくと $(L+4)+L+2D=8$ より $L+D=2$ である。したがって (L,D) は $(0,2)$，$(1,1)$，$(2,0)$ である。

それぞれの経路数は

$$\frac{8!}{4!0!2!2!}=420,\qquad \frac{8!}{5!1!1!1!}=336,\qquad \frac{8!}{6!2!0!0!}=28$$

である。よって合計は 420+336+28 = 784 通りである。全事象は 4^8 通りなので，求める確率は $\frac{784}{4^8}=\frac{784}{65536}=\frac{49}{4096}$ である。

(2) 8 歩後の点 (x,y) は，$|x|+|y|\leqq 8$ で，かつ $|x|+|y|$ と 8 の偶奇が一致する点である。条件 $x^2-y^2=16$ は $(x-y)(x+y)=16$ である。$r=x-y$，$s=x+y$ とおくと，r,s は同じ偶奇の整数で $rs=16$ を満たす。奇偶の一致する因数の組は，順序を考えて $(r,s)=(2,8),(4,4),(8,2)$ とこれらをともに負にしたものだけである。$x=(r+s)/2$，$y=(s-r)/2$ に戻すと，8 歩で到達可能な候補は $(\pm4,0)$，　$(\pm5,\pm3)$ であり，いずれも $|x|+|y|\leqq 8$ を満たす。

(1) より，$(4,0)$ への経路数は 784 通りである。対称性により $(-4,0)$ への経路数も 784 通りである。

次に $(5,3)$ への経路数を数える。条件は $R-L=5$，　$U-D=3$，　$R+L+U+D=8$ である。これより $R=L+5$，　$U=D+3$ で，合計に代入すると $(L+5)+L+(D+3)+D=8$ すなわち $L+D=0$ である。したがって $L=0$，　$D=0$，　$R=5$，　$U=3$ であり，経路数は $\frac{8!}{5!3!}=56$ 通りである。符号を変えた $(5,-3),(-5,3),(-5,-3)$ についても同じく 56 通りである。

したがって，双曲線上にある確率の分子は $784+784+4\cdot 56=1792$ である。よって求める確率は $\frac{1792}{4^8}=\frac{1792}{65536}=\frac{7}{256}$ である。

(3) (2) で数えた 1792 通りの経路のうち，途中で点 $(4,2)$ を通るものを数える。点 $(4,2)$ までの最短歩数は $4+2=6$ である。また 1 歩ごとに座標和の偶奇が変わるので，この点にいる時刻は 6 と同じ偶奇でなければならない。したがって 8 歩以内では時刻 6 または 8 だけが考えられるが，時刻 8 で $(4,2)$ にいる場合は最終点が双曲線上でない。したがって，双曲線上で終わる経路が途中で $(4,2)$ を通るなら，時刻 6 で $(4,2)$ にいなければならない。

6 歩目に $(4,2)$ に到達するには，右へ 4 回，上へ 2 回進むしかない。したがってその経路数は $\frac{6!}{4!2!}=15$ 通りである。

残り 2 歩で，$(4,2)$ から双曲線上の点に到達する可能性を調べる。(2) で得た候補のうち，$(4,2)$ から 2 歩で到達できるのは $(4,0)$，　$(5,3)$ である。$(4,0)$ へは下，下の 1 通りであり，$(5,3)$ へは右，上の順序を入れ替えて 2 通りである。したがって残り 2 歩の進み方は合計 $1+2=3$ 通りである。

よって，双曲線上で終わり，かつ途中で $(4,2)$ を通る経路は $15\cdot 3=45$ 通りである。条件付き確率は $\frac{45}{1792}$ であるから，求める値は $\frac{45}{1792}$ である。