

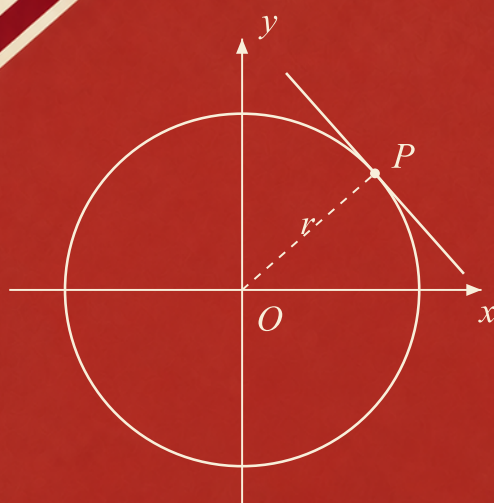
東北大学

理系（後期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

東北大学

理系数学

2017～2026 年度 後期日程

解答編



はじめに

本書は、東北大学の後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。2017～2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。



本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	14
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	26
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	38
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	50
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	62
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	74
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	86
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	98
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	111
分野索引		123



2026 年度 東北大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・後期日程〉

座標空間において、原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし、 S 上に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとる。球面 S 上の点 P に対し、内積の和

$$w = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AP}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

1. 点 P が球面 S 上を動くとき、 w の最大値と最小値、およびそれらを与える点 P の座標を求めよ。
2. 球面 S 上の点 P で $w = 1$ を満たすもの全体は、ある平面上の円になる。この円の中心の座標と半径を求めよ。
3. 点 $D(1, 2, 3)$ をとる。点 P が (2) で求めた円の周上を動くとき、 $|\overrightarrow{PD}|^2$ の最大値と最小値、およびそれらを与える点 P の座標を求めよ。

1

解説

三つの内積は、同じ動点 P によって同時に変化します。それぞれを別に評価するより、和を展開して球面の条件でまとめます。 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ とすると、例えば $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 1 - x - y$ です。ほかの二項も同様なので、和は $w = 3 - 2(x + y + z)$ となります。二次の項が球面の条件で定数となり、残るのは座標の和という一次式です。

最初の小問では、 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ と置き、座標の和を $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}$ と見ます。 $|\overrightarrow{OP}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$ なので、その範囲は $-\sqrt{3}$ から $\sqrt{3}$ です。等号は $\overrightarrow{OP} = \pm \vec{n}/\sqrt{3}$ のときで、どちらも球面上にあります。 w には和の前に -2 があるため、和が最小の点で最大値 $3 + 2\sqrt{3}$ 、和が最大の点で最小値 $3 - 2\sqrt{3}$ となります。値だけでなく、座標を $(\mp 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3})$ と対応させて示します。

$w = 1$ は平面 $x + y + z = 1$ の条件に直ります。球面を平面で切った円の中心は、球の中心 O からその平面へ下ろした垂線の足 H です。平面の法線ベクトルを $\vec{n} = (1, 1, 1)$ と置けば、 $\overrightarrow{OH} = h\vec{n}$ と書けます。平面の式から $3h = 1$ なので $H = (1/3, 1/3, 1/3)$ です。

$OH^2 = 1/3 < 1$ なので平面は球と実際に交わり、切り口は一点へ退化していません。円周上の P では、 OH と HP が垂直なので、半径の平方は $HP^2 = OP^2 - OH^2 = 2/3$ 、半径は $\sqrt{2/3}$ です。球の中心と切断円の中心を区別して測ることが、次の距離の評価にも役立ちます。

点 D までの距離は、まず球面上の条件から $PD^2 = 15 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OP}$ です。さらに $\vec{u} = \overrightarrow{HP}$ と置いて、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \vec{u}$ と分けます。 $\vec{u}$ は切断面に平行なので $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ 、長さは一定の $\sqrt{2/3}$ です。円の中心から測ることで、動く部分の制約がこの二つにまとまります。

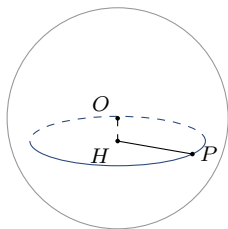
$\overrightarrow{OD} = (1, 2, 3) = 2\vec{n} + \vec{v}$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ と分解します。 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ なので、こちらも切断面に平行な成分です。法線方向の項は $\vec{u}$ との内積で消え、 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OP} = 2$ を使うと、

$$PD^2 = 11 - 2\vec{v} \cdot \vec{u}$$

となります。元の座標の式のまま評価するより、法線方向を取り除くことで等号を取る点を求めやすくします。

内積の不等式より $|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq |\vec{v}||\vec{u}| = 2/\sqrt{3}$ です。等号は二つのベクトルが平行となる場合なので、 $\vec{u} = \vec{v}/\sqrt{3}$ または $-\vec{v}/\sqrt{3}$ です。これらは必要な長さを持ち、平面に平行なので、円周上の点を実際に与えます。上限だけでなく、達成する配置も確かめます。

距離の式には内積の前に負の係数があります。従って $\vec{u} = \vec{v}/\sqrt{3}$ で距離の平方が最小の $11 - 4/\sqrt{3}$ 、逆向きで最大の $11 + 4/\sqrt{3}$ です。対応する座標は $\vec{OH} + \vec{u}$ で求め、最小の点は $(1/3 - 1/\sqrt{3}, 1/3, 1/3 + 1/\sqrt{3})$ 、最大の点は両端の符号を逆にします。平面の式と球面の式へ戻すと、どちらも満たすことが確認できます。球面から切断面、切断円からその中心の変位へと、制約を段階的に使う方法です。



球面の切断円 (概念図)

2 答案

- (1) $P = (x, y, z)$ とおき、 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ とする。 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ より

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 1 - x - y$$

であり、他の二つも同様に計算すると

$$w = 3 - 2(x + y + z). \textcircled{1}$$

内積の不等式から

$$|x + y + z| \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{3}.$$

等号は $\vec{OP}$ と $\vec{n}$ が平行なときに成立する。したがって

$$\text{最大値 } 3 + 2\sqrt{3}, \quad P = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\text{最小値 } 3 - 2\sqrt{3}, \quad P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

- (2) ①より $w = 1$ は $x + y + z = 1$ と同値である。この平面への原点の垂足は

$$H = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$OH^2 = 1/3 < 1$ なので切り口は円であり、 $HP^2 = OP^2 - OH^2 = 2/3$ より、半径は

$$\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

- (3) $\vec{u} = \vec{HP}$ とおくと

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad |\vec{u}| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$\vec{v} = (-1, 0, 1)$ とおくと、 $\vec{OD} = 2\vec{n} + \vec{v}$ だから

$$PD^2 = 15 - 2\vec{OD} \cdot \vec{OP}$$

$$= 11 - 2\vec{v} \cdot \vec{u}.$$

内積の不等式より

$$|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

両端の等号は $\vec{u} = \pm \vec{v}/\sqrt{3}$ で成立する。よって

$$\text{最大値 } 11 + \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad P = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\text{最小値 } 11 - \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad P = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

別解・背景

座標の平方完成で距離を評価する 平面上では $x + y + z = 1$ なので、 $x + 2y + 3z = 2 + (z - x)$ 、 $PD^2 = 11 - 2(z - x)$ となる。 $t = z - x$ とおく。 $x + z = 1 - y$ より

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(1 - y)^2 + t^2}{2} + y^2.$$

したがって $t^2 = \frac{4}{3} - 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{3}$ となる。 $t = \pm 2/\sqrt{3}$ は $y = 1/3$ のときに実現する。これを $x + z = 2/3$ と連立すれば、答案と同じ二点を得る。

この方法では円の半径を (3) の計算に持ち込まず、球面と平面の条件を直接使っている。距離そのものを展開して二次式を最大化するよりも、 $OP^2 = 1$ を先に使う方が計算を短くできる。



2026 年度 東北大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・後期日程〉

以下の問いに答えよ。

1. $(1.001)^{1000} > 2$ が成り立つことを示せ。
2. $(1.001)^{1002}$ を小数で表したとき、小数第 3000 位の数字を求めよ。

1

解説

(1) の指数は大きいですが、値を正確に計算する必要はありません。 $1.001 = 1 + 1/1000$ と見て二項定理を使うと、初めの二項が $1 + 1000/1000 = 2$ になります。残る二次以降の項は、二項係数も累乗も正なので、その和は厳しく正です。従って全体は 2 より大きいと分かります。必要な下限を作る項だけを残すことが、計算を短くする理由です。

一方 (2) は、下限ではなく特定の小数桁を求めます。全体の近似値から遠い桁を判断することはできないので、分母を十の累乗にして整数の位へ移します。 $N = 1001^{1002}$ と置けば、 $(1.001)^{1002} = N/10^{3006}$ です。小数第 3000 位は、整数 N の $10^{3006-3000} = 10^6$ の位に対応します。

この対応は、整数部分の桁数に依存しません。例えば $N/10^4$ の小数第二位は N の百の位です。十の累乗で割ると、小数点が決まった桁数だけ左へ動くためです。今回必要なのは百万の位であり、下位七桁を求めれば十分です。八桁目以上を求める必要はなく、それらは求める数字に影響しません。

$1001 = 1 + 1000$ として二項展開すると、第 k 項は ${}_{1002}C_k \cdot 10^{3k}$ です。 $k \geq 3$ なら 10^9 の倍数となり、少なくとも下位九桁には寄与しません。従って必要な下位七桁は、定数項、一次の項、二次の項から決まります。係数が大きくても、その項全体が高い位の倍数なら、下の位へ逆向きの繰り下がりは起きません。

残す三項は 1 、 $1002 \cdot 10^3 = 1002000$ 、 ${}_{1002}C_2 \cdot 10^6 = 501501 \cdot 10^6$ です。二次の係数の末尾は 1 なので、この項の下位七桁への寄与は 1000000 です。しかし、それだけを見て答えを 1 としてはいけません。一次の項も百万の位に 1 を持っているためです。

三項の下位七桁を加えると 2002001 となります。より厳密には、ある整数 T を用いて $N = 2002001 + 10^7 T$ と書けます。この表示から、百万の位は 2 です。上の位にどれほど大きい整数があっても、 10^7 の倍数を加えた形なら下位七桁は変わりません。

小数第 3000 位の数字も従って 2 です。桁を求める問題では、各項の必要な位への寄与と、残した項どうしの繰り上がりを両方確認します。(1) では正の残項を捨てて下から評価し、(2) では必要な位を変えない高位の項を除いて正確な桁を求めています。同じ二項定理でも、目的に応じて残す項と除く理由が異なることを区別します。

2 答案

(1) 二項定理から

$$(1.001)^{1000} = 1 + 1000 \cdot \frac{1}{1000} + \sum_{k=2}^{1000} {}^{1000}C_k \frac{1}{1000^k} \\ > 1 + 1 = 2.$$

残りの和は正であるから、求める不等式が成り立つ。

(2) $N = 1001^{1002}$ とおくと

$$(1.001)^{1002} = \frac{N}{10^{3006}}.$$

小数第 3000 位は N の 10^6 の位である。二項定理より、ある整数 M を用いて

$$\begin{aligned} N &= 1 + 1002 \cdot 10^3 + {}^{1002}C_2 10^6 + 10^9 M \\ &= 1 + 1002000 + 501501 \cdot 10^6 + 10^9 M \\ &= 2002001 + 10^7(50150 + 100M). \end{aligned}$$

したがって N の下位七桁は 2002001 であり、求める数字は

2.

3 別解・背景

増加量を積み重ねる証明

 $(1.001)^j > 1$ は $j \geq 1$ で成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} (1.001)^{1000} - 1 &= \sum_{j=0}^{999} \{(1.001)^{j+1} - (1.001)^j\} \\ &= 0.001 \sum_{j=0}^{999} (1.001)^j > 0.001 \times 1000 = 1. \end{aligned}$$

それでも (1) を示せる。各回の増加量を 0.001 で評価する方法であり、二項展開を使っていない。

§ 遠い小数の桁を求めるとき

小数第 k 位の数字は、数を 10^k 倍した整数部分の一の位である。分母が 10 のべきなら、分子のどの位に対応するかを先に決めるとよい。下位の桁からの繰り上がりは必要なので、求める一桁だけでなく、そこまでの全桁を残す。