大学入試過去問シリーズ

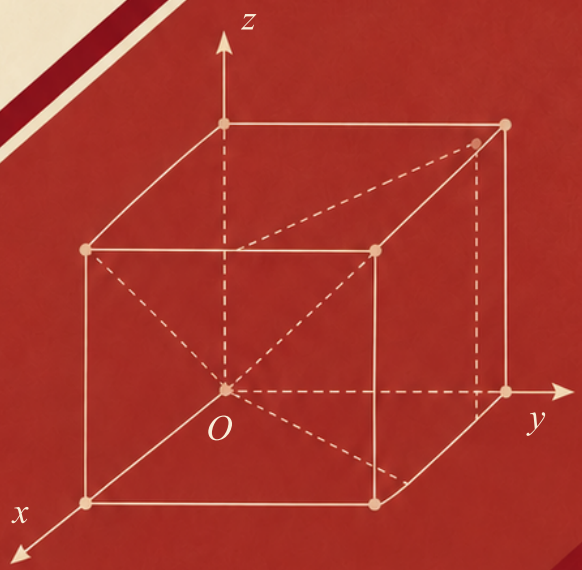
東京大学

文系

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

Evolton

大学入試過去問シリーズ

東京大学
文系数学

2017〜2026 年度　前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、東京大学の前期日程に出題された文系数学を収録した解答編です。2017〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 10 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 10 年（2017〜2026 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	24
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	36
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	45
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	56
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	66
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	76
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	89
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	101

分野索引 …… 112

2026 年度 東京大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

正の実数 k および $\alpha < \beta$ となる実数 α, β が次の条件を満たすように動く。
条件：座標平面上の放物線

$$C : y = k(x-\alpha)(\beta-x)$$

の頂点は $(-3, 1)$ であり，C は y 軸と $-2 \leqq y \leqq 0$ の範囲で交わる。
このとき，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

解説

放物線の式には k, α, β の三文字がありますが、頂点が指定されているので、三つを独立に動かすことはできません。まず対称軸に注目しましょう。二つの x 軸との交点の中点が $x = -3$ にあるため、その左右に同じ距離 $d > 0$ だけ離れた点として $\alpha = -3 - d$、$\beta = -3 + d$ と表せます。

指針　二つの交点の間隔を一文字で表す

頂点から x 軸上の交点までの横の距離を d とする。頂点の高さから k を消し、y 軸との交点条件を d の範囲に直す。

この置き方では、積 $(x-\alpha)(\beta-x)$ が $d^2-(x+3)^2$ となります。$x = -3$ での高さは kd^2 なので、頂点の高さが 1 という条件から $k = 1/d^2$ です。したがって放物線は

$$y = 1 - \frac{(x+3)^2}{d^2}$$

と、一文字 d だけで表せます。平方の前の係数が負であることも、下に開く図と対応しています。

次に y 軸との交点を調べます。ここでは $x = 0$ を代入し、その高さが $[-2, 0]$ に入る条件を使います。$d^2 > 0$ なので、不等式に d^2 を掛けても向きは変わりません。二つの不等式をそれぞれ整理すると $3 \leqq d^2 \leqq 9$ となり、$d > 0$ から $\sqrt{3} \leqq d \leqq 3$ です。特に $\beta = -3 + d \leqq 0$ なので、右側の x 軸との交点は y 軸より右には出ません。

囲まれた部分は二つの零点の間にあります。この区間では $(x+3)^2 \leqq d^2$ なので、放物線の高さが非負です。積分の両端を $-3-d$ と $-3+d$ に取れば、符号を変えずに面積を計算できます。$u = x+3$ と置くと区間は $[-d, d]$ となり、被積分関数が偶関数になるため、右半分を積分して二倍すると計算が短くなります。

得られる面積は $S = 4d/3$ です。d が増すほど面積も増すので、d の範囲の両端から面積の範囲が決まります。ただし、最大値と最小値の候補を挙げるだけで終わらず、$d = \sqrt{3}, 3$ が条件を満たすことも確かめます。どちらの場合も $k = 1/d^2 > 0$ であり、$\alpha < \beta$、頂点の位置、y 軸との交点の条件がすべて成立します。

交点の高さから d の範囲を読んでみると、$d = \sqrt{3}$ では y 軸との交点が $(0, -2)$、$d = 3$ では右の零点が原点になります。d をさらに小さくすると y 軸との交点が -2 より下へ出て、d を 3 より大きくすると交点の高さが正になります。頂点を同じ位置に置いたまま横に広げることが、問題の交点条件で制限されていると分かります。

頂点の横座標は根の中点なので、$\alpha+\beta = -6$ です。半間隔 $d = (\beta-\alpha)/2$ は正で、この和と差から二根が一意に決まります。頂点の高さの条件 $kd^2 = 1$ まで使うと、残る自由度は d だけです。三つの文字を別々の範囲で評価すると、頂点の同じ放物線を数えられなくなります。

交点の高さの条件を左右に分けると、$-2 \leqq 1-9/d^2$ は $9/d^2 \leqq 3$、$1-9/d^2 \leqq 0$ は $9/d^2 \geqq 1$ です。$d^2 > 0$ なので、それぞれ $d^2 \geqq 3, d^2 \leqq 9$ へ直せます。等号が許されているため、両端の放物線も含みます。

底辺 $\beta-\alpha=2d$、高さ 1 の三角形の面積は d です。放物線で囲む面積は $4d/3$ なので、その三角形の $4/3$ 倍となります。横方向へ広げても高さが同じだから、面積が d に比例することが積分結果にも現れています。逆に $4\sqrt{3}/3 \leqq S \leqq 4$ の任意の値から $d=3S/4$ を決めれば、許される範囲の d へ戻ります。そこから k,α,β を作れるため、両端以外の全ての面積も実現します。

2　答案

二つの x 軸との交点は α,β で、軸は $x=(\alpha+\beta)/2$。頂点の x 座標が -3 なので $\alpha+\beta=-6$ である。そこで $d=(\beta-\alpha)/2>0$ とおき、$d>0$ を用いて $\alpha=-3-d$、$\beta=-3+d$ とおく。頂点の高さは $kd^2=1$ なので

$$k=\frac{1}{d^2},\qquad y=1-\frac{(x+3)^2}{d^2}.$$

y 軸との交点条件は

$$-2 \leqq 1-\frac{9}{d^2} \leqq 0 \iff 1 \leqq \frac{9}{d^2} \leqq 3 \iff 3 \leqq d^2 \leqq 9 \iff \sqrt{3} \leqq d \leqq 3.$$

零点間では高さが非負であるから、$u=x+3$ と置くと

$$\begin{aligned} S &= \int_{-d}^{d}\left(1-\frac{u^2}{d^2}\right)du \\ &= 2\left[u-\frac{u^3}{3d^2}\right]_0^d = \frac{4d}{3}. \end{aligned}$$

逆に任意の $\sqrt{3} \leqq d \leqq 3$ に対し $k=1/d^2$、$\alpha=-3-d$、$\beta=-3+d$ とすれば、頂点と y 軸との交点の条件を満たす。$S=4d/3$ はこの許容範囲で連続に増加するので、求める範囲は

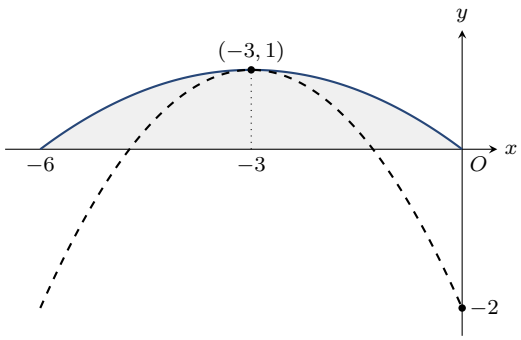
$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \leqq S \leqq 4.$$

両端は $d=\sqrt{3},3$ で実現し、これらも元の条件をすべて満たす。

3　別解・背景

$v=(x+3)/d$ とおくと、どの放物線も $y=1-v^2$ という同じ形になります。高さは 1 のまま横方向に d 倍されるので、囲まれた部分の面積も d 倍されます。基準の面積は $\int_{-1}^{1}(1-v^2)\,dv=4/3$ ですから、$S=4d/3$ となります。

許容範囲の両端に対応する放物線は、次のようになります。実線は $d=3$、破線は $d=\sqrt{3}$ です。頂点の位置と高さは共通で、零点の間隔が変わっています。



どの d でも、底辺は $2d$、高さは 1 です。面積をその積で割った比は $S/(2d)=2/3$ で一定になります。基準となる放物線の面積を一度求めれば、横の拡大率からほかの d での面積も求められるという見方です。

2026 年度 東京大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点

$$(x, y) \quad (x, y \text{ は整数}, 1 \leqq x \leqq 3, 1 \leqq y \leqq n)$$

から相異なる 3 点を無作為に選ぶ。この 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。

(1) p_5 を求めよ。

(2) $m \geqq 2$ を整数とするとき，p_{2m} を求めよ。

1 解説

三角形ができる配置を直接数えるには、三点の位置関係を細かく分ける必要がありそうです。ここでは、三角形ができない場合を先に数えます。相異なる三点を選んでいるので、三角形にならないのは、三点が一直線上に並ぶときに限られます。

指針　一直線上の三点を二種類に分ける

縦の一列から三点を選ぶ場合と、三列から一点ずつ選ぶ場合を数える。後者では三つの y 座標が等差数列になる。

三点のうち二点が同じ縦列にあれば、その二点を通る直線は縦の直線です。三点目も一直線上にあるには、同じ列に属さなければなりません。したがって、それ以外の一直線上の配置は、$x = 1, 2, 3$ の各列から一点ずつ取る場合に限られます。この説明によって、二つの分類が重ならず、全場合を尽くすことが分かります。

三列から一点ずつ選んだ場合、x 座標の間隔はともに 1 です。一直線上にあるためには y 座標の増分も等しいので、

$$(1, y), \quad (2, y + d), \quad (3, y + 2d)$$

と表せます。y, d は整数です。$d = 0$ は水平な直線、$d > 0$ と $d < 0$ は傾きの向きが反対の直線を表します。後の和では、$d = 0$ を一回だけ、正負の d をそれぞれ数えます。

固定した $d \geqq 0$ では、最も低い点の高さが y、最も高い点の高さが $y+2d$ です。三点がすべて $1 \leqq y \leqq n$ の範囲に入る条件は $1 \leqq y \leqq n - 2d$ となり、選べる整数の個数は $n - 2d$ です。$d < 0$ でも、最も低い点と高い点の差は $2|d|$ なので、個数は $n - 2|d|$ となります。

(1)の $n = 5$ では、$|d| = 0, 1, 2$ だけが可能です。縦列の配置と三列にまたがる配置の個数を加え、全体の ${}_{15}\mathrm{C}_3$ から差し引きます。(2)では $n = 2m$ なので、$|d| \leqq m - 1$ です。$|d| = m$ を入れると個数が 0 となり、実際の配置はありません。

全体の選び方は、選んだ三点の順序を区別しない組合せです。一方、三列の場合には列の x 座標が固定されているので、(y, d) が決まれば選ばれた三点の集合も一意に決まります。この数え方で求めた個数を、さらに 3! 倍したり割ったりする必要はありません。

無作為に選ぶ相異なる三点の集合は、全て同じ確率です。全点数が $3n$ なので、分母は ${}_{3n}\mathrm{C}_3$ です。一直線上の集合を数えてこの分母で割れば、三角形にならない確率となり、1 から引くことで求める確率が得られます。「一直線上の三点を選んだ後の向き」のような追加の選択は、標本に含まれません。

$n = 5, d = 1$ なら $y = 1, 2, 3$ で三組、$d = 2$ なら $y = 1$ で一組です。$d = -1$ では $y = 3, 4, 5$、$d = -2$ では $y = 5$ となり、反対向きの配置も同数あります。$d = 0$ の水平五組は正負のどちらにも重ねず一度だけ数えます。この合計 13 と、縦の 30 を合わせて 43 組を除くので、三角形は $455 - 43 = 412$ 組です。

$n=2m$ では、正の d について

$$\sum_{d=1}^{m-1}(2m-2d)=2m(m-1)-m(m-1)=m(m-1)$$

です。負の分をもう一度足し、水平の $2m$ を加えると $2m^2$ となります。例えば $m=2$ では縦の 12 組と三列の 8 組を合わせて 20 組です。全 220 組からこれを除いて $p_4=10/11$ となり、一般式の代入とも一致します。

2 答案

(1) $n=5$ のとき，全 15 点から相異なる 3 点を選ぶ方法は ${}_{15}\mathrm{C}_3=455$ 通りである。三角形にならないのは 3 点が一直線上にある場合に限る。

3 点が同じ縦列にある場合は $3\cdot{}_5\mathrm{C}_3=30$ 通りである。同じ列に二点を選んだなら、それらを通る直線は鉛直なので、一直線上となるには三点目もその列になければならない。したがって同じ列に三点ある場合を除けば、一直線上の三点は三列から一点ずつ選ぶ場合だけである。一直線上にあるための必要十分条件は中央列の点が両端の点の中点になることであり，3 点は

$$(1,y),\qquad (2,y+d),\qquad (3,y+2d)$$

と表せる。両端の y 座標の差は $2d$ なので、中央点も格子点となる条件から d は整数である。$d\geqq 0$ なら $1\leqq y\leqq 5-2d$、$d<0$ なら $1-2d\leqq y\leqq 5$。したがって固定した整数 d に対して 3 つの y 座標がすべて 1 以上 5 以下となる y は $5-2|d|$ 個であり，$|d|\leqq 2$ である。よってこの場合は

$$\sum_{d=-2}^{2}(5-2|d|)=5+2\cdot 3+2\cdot 1=13$$

通りである。したがって非三角形は $30+13=43$ 通りなので

$$p_5=1-\frac{43}{455}=\frac{412}{455}$$

である。

(2) $n=2m$ とする。全事象は ${}_{6m}\mathrm{C}_3=m(6m-1)(6m-2)$ 通りである。同じ縦列に 3 点がある場合は $3\cdot{}_{2m}\mathrm{C}_3=2m(2m-1)(m-1)$ 通りである。

3 列から 1 点ずつ選ぶ場合は (1) と同じ表示を使う。固定した d に対する y の個数は $2m-2|d|$ であり，$|d|\leqq m-1$ であるから

$$\sum_{d=-(m-1)}^{m-1}(2m-2|d|)=2m+2\sum_{d=1}^{m-1}(2m-2d)=2m+4m(m-1)-2m(m-1)=2m^2$$

通りである。2 つの場合は互いに排反なので，一直線上にある 3 点は

$$2m(2m-1)(m-1)+2m^2=2m(2m^2-2m+1)$$

通りである。ゆえに

$$p_{2m}=1-\frac{2m(2m^2-2m+1)}{m(6m-1)(6m-2)}=1-\frac{2(2m^2-2m+1)}{(6m-1)(6m-2)}$$

である。

3 別解・背景

三列にまたがる一直線上の配置は、両端の点から数えることもできます。両端の y 座標を r,s とすると、中央の高さは $(r+s)/2$ です。これが整数になる条件は、r,s の偶奇が等しいことです。両端が 1 から n までにあれば、その平均も同じ範囲に入ります。

$n=5$ では奇数が三個、偶数が二個なので、配置の個数は $3^2+2^2=13$ です。$n=2m$ ではどちらも m 個なので、$m^2+m^2=2m^2$ となります。左列と右列は区別されるため、(r,s) と (s,r) は $r\neq s$ なら異なる配置です。等差数列の増分を足し上げる主解と、両端の偶奇を数えるこの方法は、同じ三点の集合を別の情報で表したものです。

3 2026 年度 東京大学・文系 第 3 問

【数学（文系）第 3 問】〈2026 年度・前期日程〉

$0 < a < 1$ とし，関数

$$f(x) = \frac{a}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{a} - 3$$

を考える。また，関数 $g(x)$ は，すべての整数 n について

$$\begin{cases} g(x) = x - 2n & (2n \leqq x < 2n+1), \\ g(x) = -x + 2n + 2 & (2n+1 \leqq x < 2n+2) \end{cases}$$

で定められるとする。

(1) $x \geqq 4$ において $f(x) > g(x)$ であることを示せ。

(2) $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{2}{3}$ とする。$x \geqq 0$ における 2 つの曲線 $y = f(x), y = g(x)$ の交点の個数を求めよ。

1 解説

g の定義では整数 n が使われていますが、グラフは周期 2 の折れ線です。各周期で 0 から 1 へ上がり、再び 0 へ下がるので、すべての x について $0 \leqq g(x) \leqq 1$ です。まずこの上限を使い、交点を探す範囲を狭めます。

指針　交点がない範囲を除き、残る四区間で差の符号を調べる

$x \geqq 4$ を前問で除外する。各折れ線上で $f-g$ の単調性と端点値を調べ、交点の存在と個数を同時に決める。

(1)で $x \geqq 4$ をすべて $f(x) > 1$ として抑えようとすると、$x = 4$ 付近ではうまくいきません。そこで $4 \leqq x < 5$ では実際の折れ線 $g(x) = x - 4$ と比べます。$y = x - 1$ と置いた差は $ay^2/8 + 2/a - y$ です。相加相乗平均から非負になりますが、示すべき不等式は等号を含まないので、等号条件も調べます。等号には $ay = 4$ が必要なのに、$a < 1$、$y < 4$ から $ay < 4$ です。$x \geqq 5$ では f の増加と $f(5) > 1$ を使い、残る範囲をまとめて除けます。

(2)は、これで $0 \leqq x < 4$ だけを調べればよくなります。$b = 2/a - 3$ と置くと、$1/2 < a < 2/3$ から $0 < b < 1$ です。$x = 1$ では $f - g = b - 1 < 0$、$x = 0, 2$ では $f - g = a/8 + b > 0$ となります。さらに $[0, 1)$ で差が減少し、$[1, 2)$ で増加するので、最初の二区間にはそれぞれ一つずつ交点があります。端点の符号が変わることだけでは、交点が一つとは限りません。単調性も併せて使うところが、個数を確定する理由になります。

残る $[2, 3)$ では差が減少し、$[3, 4)$ では増加します。したがって、折れ線の頂点 $x = 3$ での差

$$H(a) = f(3) - g(3) = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 4$$

が、二交点を持つかどうかを決めます。$H(a) > 0$ なら交点なし、$H(a) < 0$ なら頂点の両側に一つずつです。$H(a) = 0$ では二つの交点が $x = 3$ に重なり、一個になります。境目の a は $H(a) = 0$ を解き、問題の範囲に入る根だけを取ります。

区間を半開区間にしているのは、整数の端点を二度数えないためです。特に境界値では $x = 3$ が $[3, 4)$ 側に属します。最初の二交点と合わせた個数を、境目を含む三つの場合に分けて答えます。

後半の単調性は、折れ線の傾きと f' の大小から確認できます。$2<x<3$ では $f'(x)=a(x-1)/4<a/2<1/3$ なので、傾き 1 の折れ線との差は減少します。$3<x<4$ では折れ線の傾きが -1 となり、$f'(x)>0$ から差は増加します。$x=3$ の左右でこの向きが変わるため、そこでの差の符号だけで後半の交点数が決まります。

(1) の差は、平方の形へ直接整理することもできます。

$$\frac{ay^2}{8}+\frac{2}{a}-y=\frac{(ay-4)^2}{8a}$$

です。$3\leqq y<4, 0<a<1$ から $ay<4$ なので、分子は厳密に正となります。また $f(5)-1=2(a-1)^2/a>0$ で、こちらも等号が成り立たないことを式で確認できます。

前半の単調性では、$0<x<1$ で $f'=a(x-1)/4\leqq 0$ なのに対し、$g'=1$ なので差は減少します。$1<x<2$ では $f'>0, g'=-1$ なので差は増加します。$x=1$ は差が負であり、交点ではありません。したがって左右の二交点はこの境目に重ならず、厳密に二個となります。後半でも $x=2,4$ の差は正なので、個数が変わるのは $x=3$ に達した場合だけです。

境界 $a_0=4-2\sqrt{3}$ の位置は、$2\sqrt{3}<7/2$ と $2\sqrt{3}>10/3$ から $1/2<a_0<2/3$ と確かめられます。両比較は正の数を二乗し、それぞれ $12<49/4, 12>100/9$ を使います。大きい方の根 $4+2\sqrt{3}$ は区間外なので、H の符号を変える境目は一つだけです。この確認により、答案の三場合が指定された a の全範囲を尽くします。

2 答案

(1) $4\leqq x<5$ では $g(x)=x-4$ である。$y=x-1$ と置くと $3\leqq y<4$ であり、相加相乗平均より

$$f(x)-g(x)=\frac{ay^2}{8}+\frac{2}{a}-y\geqq 2\sqrt{\frac{ay^2}{8}\cdot\frac{2}{a}}-y=0.$$

等号には $ay=4$ が必要だが、$a<1$、$y<4$ より $ay<4$ なので、差は正である。

$x\geqq 5$ では f は増加し、

$$f(x)\geqq f(5)=2a+\frac{2}{a}-3>1\geqq g(x).$$

最後の不等式は $a+1/a>2$ $(0<a<1)$ による。したがって全範囲で $f(x)>g(x)$ である。

(2) $1/2<a<2/3$ より $3<2/a<4$。したがって $b=2/a-3$ とおけば $0<b<1$ である。g は偶数の点で 0、奇数の点で 1 を取り、各境目で連続である。(1) より $x\geqq 4$ に交点はない。$h=f-g$ とすると、$0\leqq x\leqq 4$ で

$$h(0)=h(2)=\frac{a}{8}+b>0,$$
$$h(1)=b-1<0,$$
$$h(3)=H(a)=\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-4,$$
$$h(4)=\frac{9a}{8}+b>0.$$

g の各区間の傾きは $1,-1,1,-1$ であり、$f'(x)=a(x-1)/4$ と $a<2/3$ から、h は $[0,1],[2,3]$ で減少、$[1,2],[3,4]$ で増加する。実際、増加区間では $h'=a(x-1)/4+1>0$、減少区間では $h'=a(x-1)/4-1<0$ となる。各区間で連続かつ厳密に単調なので、端の符号が異なるときにちょうど一つの交点がある。よって $[0,1]$ と $[1,2]$ には一つずつ交点があり、$h(1)<0$ なので同じ点を二重に数えることもない。

後半には、$H>0$ なら交点なし、$H=0$ なら $x=3$ で一個、$H<0$ ならその両側に一個ずつある。$H(a)=(a^2-8a+4)/(2a)$ であり、$2a>0$ なので分子の符号と等しい。分子の二根は $4\pm 2\sqrt{3}$ である。大きい方は指定の区間外にあり、境界は $a_0=4-2\sqrt{3}$ である。$1/2<a_0<2/3$ より、総数は

$$\begin{cases} 2 & (1/2<a<a_0),\\ 3 & (a=a_0),\\ 4 & (a_0<a<2/3). \end{cases}$$

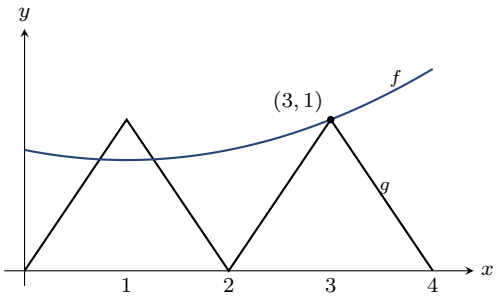
である。$x=3$ の交点は一個として数えた。

3　別解・背景

境界値 $a_0 = 4 - 2\sqrt{3}$ では、$H(a_0) = 0$ となります。$x = 3$ の左側では $f - g$ が減少し、右側では増加するため、この点での差は局所的な最小値です。曲線が滑らかに接するというより、折れ線の頂点に放物線が届く配置です。

また、$1/2 < a < 2/3$ では $H'(a) = 1/2 - 2/a^2 < 0$ なので、a を増やすとこの最小値が下がります。正なら交点なし、0 なら頂点で一個、負なら両側で二個となり、後半の交点数の変化をグラフの位置関係として読めます。二次方程式の解を四区間でそれぞれ求めなくても、差の増減と頂点での符号から個数を確定できる理由です。

境界値での位置関係を図に示します。放物線は折れ線の頂点 $(3, 1)$ を通り、その左右では折れ線より上にあります。



$x = 3$ での折れ線の傾きは左で 1、右で -1 です。この点で両曲線が同じ高さになっても、滑らかな曲線同士の接点のように導関数の一致を求める必要はありません。この例では、両側で差が正、頂点で差が 0 という条件で一個の交点を数えています。

2026 年度 東京大学・文系 第 4 問

【数学（文系）第 4 問】〈2026 年度・前期日程〉

k を実数とし，座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - kx$$

を考える。C 上の 2 点 P, Q が次の条件 $(*)$ を満たすとする。

$(*)$ 点 $O(0,0), P, Q$ は相異なる 3 点であり，O, P, Q における C の接線は，どの 2 本も交わり，交わる角のうち小さい方の角がすべて $\dfrac{\pi}{3}$ である。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を $\tan\theta$ を用いて表せ。

(2) 条件 $(*)$ を満たす 2 点 P, Q が存在するような k の範囲を求めよ。

(3) (2) で求めた範囲の k に対して，条件 $(*)$ を満たす 2 点 P, Q が動くとき，O, P, Q における C の接線で囲まれる三角形の面積を S とする。ただし，3 本の接線が 1 点で交わる場合は $S = 0$ とする。S の最大値を M，最小値を m とするとき，$M = 4m$ となる k の値を求めよ。

解説

(1)は正接の加法定理です。$\theta + \pi/3$ は $(-\pi/6, \pi/2)$ にあるので正接が定義されます。また $\tan\theta < 1/\sqrt{3}$ より、公式の分母 $1 - \sqrt{3}\tan\theta$ も正です。ここでの角度の範囲と、(2)で三本の接線を並べたときの範囲を区別して使いましょう。

接線の傾きは、接点の x 座標を t とすると $3t^2 - k$ です。原点の接線の傾きは $-k$ であり、原点以外では必ずそれより大きくなります。この大小関係を、三本の接線の角度条件と結び付けることから始めます。

指針　三本の方向を並べ、接点の符号を分ける

有限の傾きを持つ直線の方向角を $(-\pi/2, \pi/2)$ で取る。存在条件を求めた後は、二つの接点の正負による四通りを調べる。

どの二直線も小さい方の角が $\pi/3$ なら、三本の方向角は小さい順に $\theta, \theta + \pi/3, \theta + 2\pi/3$ と書けます。直線の方向は π を加えても同じなので、最初と最後の方向角の差が $2\pi/3$ でも、小さい交角は $\pi/3$ です。三つの方向角をすべて $(-\pi/2, \pi/2)$ に入れるには、$-\pi/2 < \theta < -\pi/6$ が必要です。原点の接線が最小の傾きを持つので、$\tan\theta = -k$ と対応させます。

こうして k の必要条件を得た後、残る二方向の傾きが実際に接線の傾きとして現れるかを確かめます。$3t^2 - k$ が取る値の範囲は $[-k, \infty)$ ですから、$-k$ より大きい二つの傾きには、正負一つずつの接点が存在します。傾きが異なるので接点の絶対値も異なり、三点が相異なる条件も満たせます。

(3)の面積では、原点の接線が斜めのままだと底辺と高さの計算が長くなります。そこで $Y = y + kx$ と置き、原点の接線を $Y = 0$ へ移します。x 座標は変えず、同じ x にある上下の点を同じ量だけ動かすので、縦の幅と面積は変わりません。残る二直線は $Y = Ax + u$、$Y = Dx + v$ と書けます。ここで $0 < A < D$ であり、接点の座標は $p = \varepsilon\sqrt{A/3}$、$q = \delta\sqrt{D/3}$ です。ε, δ のそれぞれが 1 または -1 となります。

底辺の両端は二直線と $Y = 0$ の交点、高さは二直線の交点の Y 座標の絶対値です。計算すると、符号の違いは $(\delta\sqrt{D} - \varepsilon\sqrt{A})^2$ にまとまります。同符号なら差の二乗、異符号なら和の二乗となるため、四通りの面積は二つの値に分かれます。差の二乗も正なので最小値は 0 ではありません。最大値と最小値の比から $D = 9A$ を得て、最後に加法定理で D/A を k の式に戻します。