

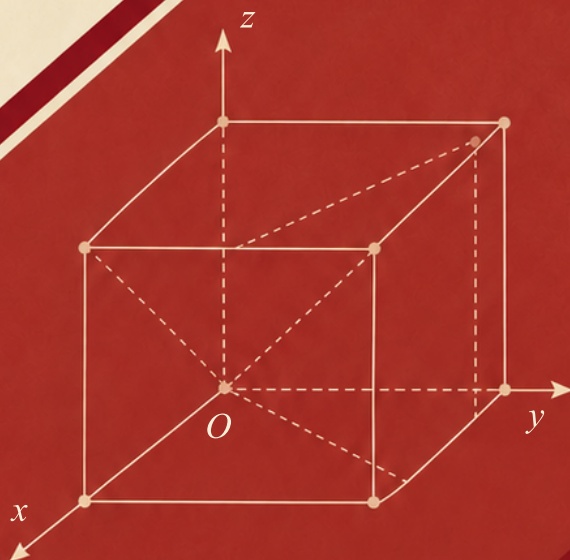
東京大学

文系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

東京大学

文系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編



はじめに

本書は、東京大学の前期日程で出題された文系数学を、2017～2026年度の10年分収録した解答編です。各問を「問題」「解説」「答案」「別解・背景」の順に掲載しました。問題を解く前に答えを探すための本としても使えますが、自分で考えた筋道と解説を比べ、次に同じ考え方を使えるようにするところまで取り組んでください。

数学の解答は、出来上がったものを読むと、最初から道筋が分かっていたように見えることがあります。しかし、実際に問題を前にしたときには、文字をどう置くか、どの条件から使うか、計算を進めるべきか、別の見方を探すべきかといった判断が必要です。そこで本書の解説では、式変形の結果に加えて、その方法を選ぶ理由を述べるようにしました。例えば、玉を増やす確率の問題でも、並び全体を記録する必要があるとは限りません。次の操作に関する右端の色だけに着目すれば、少数の状態の漸化式として扱える場合もあります。解説を読むときは、どの条件や問い方が、その方針を考えるきっかけになったかにも目を向けてください。

答案には、条件から結論へ進むために必要な論証をまとめています。解説を読んで分かったつもりになっても、答案を自分の言葉で書こうとすると、場合分けの理由や不等号の向きが曖昧だったと気づくことがあります。答えが一致したときにも、途中で使った条件が同じか、端点や等号の場合を落としていないかを比べてみましょう。領域を求める問題なら、条件を満たす点が入る領域に加えて、領域内の点が入る領域に元々の条件から作れることも必要です。こうした確認を自分で書けるようになると、解法を覚える学習から一歩進めます。

別解・背景には、同じ問題を他の方法で見るときの説明を置きました。初めて読むときに、すべての方法を同時に覚える必要はありません。まず主解の考え方を理解し、その後で、別の方法では何が簡単になり、何を確かめる必要があるのかを比べてください。図形の問題を座標で解いたなら、図形的な説明ではどの長さや角度を使っているかを見ます。式で求めた最大値を図で読み直すと、等号が成立する配置の意味が分かることもあります。別解を読む目的は、解法の数を増やすことより、条件を異なる方向から理解することにあります。



本書の使い方

一年度を通して取り組む場合は、まず問題編などから問題だけを読み、当時の試験時間と選択条件に従って解いてみてください。解けた問題と解けなかった問題を分けるだけでなく、方針が立たなかったのか、計算の途中で止まったのか、論証を書き切れなかったのかを残しておくと、解説を読む目的がはっきりします。解説を開いた後も、自分が考えた方法が使えないかを一度確かめてみましょう。本書の方法と異なっている、条件を正しく扱い、結論まで示していれば有効な解答です。

復習では、解説を閉じて、もう一度答案を書いてください。前回の計算をそのまま写すより、どの条件を最初に使うかを考え直す方が、自分が理解できたところと、まだ説明できないところを区別できます。とくに、文字で割る前の符号、場合分けの境目、求めた値が実現する条件は、読み流しやすい箇所です。正答した問題でも、これらの理由を口頭で説明できるか、短く書けるかを確かめてください。一度の解き直しで十分に書けなかったところは、日を置いて再び取り組むとよいでしょう。

分野を絞って学習するときは、巻末の分野索引から該当する問題を探せます。同じ分野でも、方程式を解く問題、値を評価する問題、解の存在を示す問題では、必要な考え方が異なります。続けて数問を解いた後、使った道具と、その道具が使える条件を整理してみてください。

収録年度によって、数学の履修課程が異なります。各問題は出題当時の条件を保って掲載しています。年度をさかのぼって学習するときは、現在の履修範囲と照らし合わせながら、取り組む問題を選んでください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	11
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	24
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	36
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	45
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	56
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	66
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	76
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	89
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問	101
分野索引		112



2026 年度 東京大学・文系 第 1 問

【数学（文系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

正の実数 k および $\alpha < \beta$ となる実数 α, β が次の条件を満たすように動く。

条件：座標平面上の放物線

$$C: y = k(x - \alpha)(\beta - x)$$

の頂点は $(-3, 1)$ であり、 C は y 軸と $-2 \leq y \leq 0$ の範囲で交わる。

このとき、 C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

1

解説

放物線の式には k, α, β の三文字がありますが、頂点が指定されているので、三つを独立に動かすことはできません。まず対称軸に注目しましょう。二つの x 軸との交点の中点が $x = -3$ にあるため、その左右に同じ距離 $d > 0$ だけ離れた点として $\alpha = -3 - d$ 、 $\beta = -3 + d$ と表せます。

指針 二つの交点の間隔を一文字で表す

頂点から x 軸上の交点までの横の距離を d とする。頂点の高さから k を消し、 y 軸との交点条件を d の範囲に直す。

この置き方では、積 $(x - \alpha)(\beta - x)$ が $d^2 - (x + 3)^2$ となります。 $x = -3$ での高さは kd^2 なので、頂点の高さが 1 という条件から $k = 1/d^2$ です。したがって放物線は

$$y = 1 - \frac{(x + 3)^2}{d^2}$$

と、一文字 d だけで表せます。平方の前の係数が負であることも、下に開く図に対応しています。

次に y 軸との交点を調べます。ここでは $x = 0$ を代入し、その高さが $[-2, 0]$ に入る条件を使います。 $d^2 > 0$ なので、不等式に d^2 を掛けても向きは変わりません。二つの不等式をそれぞれ整理すると $3 \leq d^2 \leq 9$ となり、 $d > 0$ から $\sqrt{3} \leq d \leq 3$ です。特に $\beta = -3 + d \leq 0$ なので、右側の x 軸との交点は y 軸より右には出ません。

囲まれた部分は二つの零点の間にあります。この区間では $(x + 3)^2 \leq d^2$ なので、放物線の高さが非負です。積分の両端を $-3 - d$ と $-3 + d$ に取れば、符号を変えずに面積を計算できます。 $u = x + 3$ と置くと区間は $[-d, d]$ となり、被積分関数が偶関数になるため、右半分を積分して二倍すると計算が短くなります。

得られる面積は $S = 4d/3$ です。 d が増すほど面積も増すので、 d の範囲の両端から面積の範囲が決まります。ただし、最大値と最小値の候補を挙げるだけで終わらず、 $d = \sqrt{3}, 3$ が条件を満たすことも確かめます。どちらの場合も $k = 1/d^2 > 0$ であり、 $\alpha < \beta$ 、頂点の位置、 y 軸との交点の条件がすべて成立します。

交点の高さから d の範囲を読んでみると、 $d = \sqrt{3}$ では y 軸との交点が $(0, -2)$ 、 $d = 3$ では右の零点が原点になります。 d をさらに小さくすると y 軸との交点が -2 より下へ出て、 d を 3 より大きくすると交点の高さが正になります。頂点を同じ位置に置いたまま横に広げることが、問題の交点条件で制限されていると分かります。

頂点の横座標は根の中点なので、 $\alpha + \beta = -6$ です。半間隔 $d = (\beta - \alpha)/2$ は正で、この和と差から二根が一意に決まります。頂点の高さの条件 $kd^2 = 1$ まで使うと、残る自由度は d だけです。三つの文字を別々の範囲で評価すると、頂点の同じ放物線を数えられなくなります。

交点の高さの条件を左右に分けると、 $-2 \leq 1 - 9/d^2$ は $9/d^2 \leq 3$ 、 $1 - 9/d^2 \leq 0$ は $9/d^2 \geq 1$ です。 $d^2 > 0$ なので、それぞれ $d^2 \geq 3, d^2 \leq 9$ へ直せます。等号が許されているため、両端の放物線も含まれます。

底辺 $\beta - \alpha = 2d$ 、高さ 1 の三角形の面積は d です。放物線で囲む面積は $4d/3$ なので、その三角形の $4/3$ 倍となります。横方向へ広げても高さが同じだから、面積が d に比例することが積分結果にも現れています。逆に $4\sqrt{3}/3 \leq S \leq 4$ の任意の値から $d = 3S/4$ を決めれば、許される範囲の d へ戻ります。そこから k, α, β を作れるため、両端以外の全ての面積も実現します。

2 答案

二つの x 軸との交点は α, β で、軸は $x = (\alpha + \beta)/2$ 。頂点の x 座標が -3 なので $\alpha + \beta = -6$ である。そこで $d = (\beta - \alpha)/2 > 0$ とおき、 $d > 0$ を用いて $\alpha = -3 - d$ 、 $\beta = -3 + d$ とおく。頂点の高さは $kd^2 = 1$ なので

$$k = \frac{1}{d^2}, \quad y = 1 - \frac{(x+3)^2}{d^2}.$$

y 軸との交点条件は

$$-2 \leq 1 - \frac{9}{d^2} \leq 0 \iff 1 \leq \frac{9}{d^2} \leq 3 \iff 3 \leq d^2 \leq 9 \iff \sqrt{3} \leq d \leq 3.$$

零点間では高さが非負であるから、 $u = x + 3$ と置くと

$$\begin{aligned} S &= \int_{-d}^d \left(1 - \frac{u^2}{d^2}\right) du \\ &= 2 \left[u - \frac{u^3}{3d^2} \right]_0^d = \frac{4d}{3}. \end{aligned}$$

逆に任意の $\sqrt{3} \leq d \leq 3$ に対し $k = 1/d^2$ 、 $\alpha = -3 - d$ 、 $\beta = -3 + d$ とすれば、頂点と y 軸との交点の条件を満たす。 $S = 4d/3$ はこの許容範囲で連続に増加するので、求める範囲は

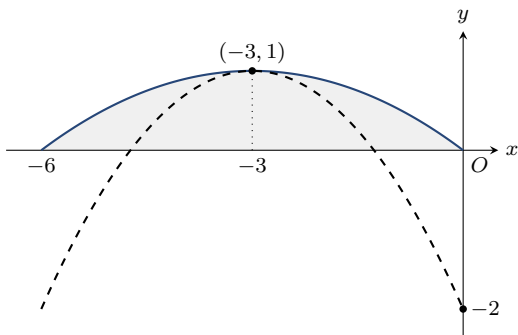
$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq S \leq 4.$$

両端は $d = \sqrt{3}, 3$ で実現し、これらも元の条件をすべて満たす。

3 別解・背景

$v = (x+3)/d$ とおくと、どの放物線も $y = 1 - v^2$ という同じ形になります。高さは 1 のまま横方向に d 倍されるので、囲まれた部分の面積も d 倍されます。基準の面積は $\int_{-1}^1 (1 - v^2) dv = 4/3$ ですから、 $S = 4d/3$ となります。

許容範囲の両端に対応する放物線は、次のようになります。実線は $d = 3$ 、破線は $d = \sqrt{3}$ です。頂点の位置と高さは共通で、零点の間隔が変わっています。



どの d でも、底辺は $2d$ 、高さは 1 です。面積をその積で割った比は $S/(2d) = 2/3$ で一定になります。基準となる放物線の面積を一度求めれば、横の拡大率からほかの d での面積も求められるという見方です。



2026 年度 東京大学・文系 第 2 問

【数学（文系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

 n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点

$$(x, y) \quad (x, y \text{ は整数}, 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq n)$$

から相異なる 3 点を無作為に選ぶ。この 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。(1) p_5 を求めよ。(2) $m \geq 2$ を整数とすると、 p_{2m} を求めよ。

1

解説

三角形ができる配置を直接数えるには、三点の位置関係を細かく分ける必要があります。ここでは、三角形ができない場合を先に数えます。相異なる三点を選んでいるので、三角形にならないのは、三点が一直線上に並ぶときに限られます。

指針 一直線上の三点を二種類に分ける

縦の列から三点を選ぶ場合と、三列から一点ずつ選ぶ場合を数える。後者では三つの y 座標が等差数列になる。

三点のうち二点が同じ縦列にあれば、その二点を通る直線は縦の直線です。三点目も一直線上にあるには、同じ列に属さなければなりません。したがって、それ以外の一直線上の配置は、 $x = 1, 2, 3$ の各列から一点ずつ取る場合に限られます。この説明によって、二つの分類が重ならず、全場合を尽くすことが分かります。

三列から一点ずつ選んだ場合、 x 座標の間隔はともに 1 です。一直線上にあるためには y 座標の増分も等しいので、

$$(1, y), \quad (2, y + d), \quad (3, y + 2d)$$

と表せます。 y, d は整数です。 $d = 0$ は水平な直線、 $d > 0$ と $d < 0$ は傾きの向きが反対の直線を表します。後の和では、 $d = 0$ を一回だけ、正負の d をそれぞれ数えます。

固定した $d \geq 0$ では、最も低い点の高さが y 、最も高い点の高さが $y + 2d$ です。三点がすべて $1 \leq y \leq n$ の範囲に入る条件は $1 \leq y \leq n - 2d$ となり、選べる整数の個数は $n - 2d$ です。 $d < 0$ でも、最も低い点と高い点の差は $2|d|$ なので、個数は $n - 2|d|$ となります。

(1) の $n = 5$ では、 $|d| = 0, 1, 2$ だけが可能です。縦列の配置と三列にまたがる配置の個数を加え、全体の ${}_{15}C_3$ から差し引きます。(2) では $n = 2m$ なので、 $|d| \leq m - 1$ です。 $|d| = m$ を入れると個数が 0 となり、実際の配置はありません。

全体の選び方は、選んだ三点の順序を区別しない組合せです。一方、三列の場合には列の x 座標が固定されているので、 (y, d) が決まれば選ばれた三点の集合も一意に決まります。この数え方で求めた個数を、さらに 3! 倍したり割ったりする必要はありません。

無作為に選ぶ相異なる三点の集合は、全て同じ確率です。全点数が $3n$ なので、分母は ${}_{3n}C_3$ です。一直線上の集合を数えてこの分母で割れば、三角形にならない確率となり、1 から引くことで求める確率が得られます。「一直線上の三点を選んだ後の向き」のような追加の選択は、標本に含まれません。

$n = 5, d = 1$ なら $y = 1, 2, 3$ で三組、 $d = 2$ なら $y = 1$ で一組です。 $d = -1$ では $y = 3, 4, 5$ 、 $d = -2$ では $y = 5$ となり、反対向きの配置も同数あります。 $d = 0$ の水平五組は正負のどちらにも重ねず一度だけ数えます。この合計 13 と、縦の 30 を合わせて 43 組を除くので、三角形は $455 - 43 = 412$ 組です。

$n = 2m$ では、正の d について

$$\sum_{d=1}^{m-1} (2m - 2d) = 2m(m-1) - m(m-1) = m(m-1)$$

です。負の分をもう一度足し、水平の $2m$ を加えると $2m^2$ となります。例えば $m = 2$ では縦の 12 組と三列の 8 組を合わせて 20 組です。全 220 組からこれを除いて $p_4 = 10/11$ となり、一般式の代入とも一致します。

2 答案

(1) $n = 5$ のとき、全 15 点から相異なる 3 点を選ぶ方法は ${}_{15}C_3 = 455$ 通りである。三角形にならないのは 3 点が一直線上にある場合に限る。

3 点が同じ縦列にある場合は $3 \cdot {}_5C_3 = 30$ 通りである。同じ列に二点を選んだなら、それらを通る直線は鉛直なので、一直線上となるには三点目もその列になければならない。したがって同じ列に三点ある場合を除けば、一直線上の三点は三列から一点ずつ選ぶ場合だけである。一直線上にあるための必要十分条件は中央列の点が両端の点の中間点になることであり、3 点は

$$(1, y), \quad (2, y + d), \quad (3, y + 2d)$$

と表せる。両端の y 座標の差は $2d$ なので、中央点も格子点となる条件から d は整数である。 $d \geq 0$ なら $1 \leq y \leq 5 - 2d$ 、 $d < 0$ なら $1 - 2d \leq y \leq 5$ 。したがって固定した整数 d に対して 3 つの y 座標がすべて 1 以上 5 以下となる y は $5 - 2|d|$ 個であり、 $|d| \leq 2$ である。よってこの場合は

$$\sum_{d=-2}^2 (5 - 2|d|) = 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 13$$

通りである。したがって非三角形は $30 + 13 = 43$ 通りなので

$$p_5 = 1 - \frac{43}{455} = \frac{412}{455}$$

である。

(2) $n = 2m$ とする。全事象は ${}_{6m}C_3 = m(6m-1)(6m-2)$ 通りである。同じ縦列に 3 点がある場合は $3 \cdot {}_{2m}C_3 = 2m(2m-1)(m-1)$ 通りである。

3 列から 1 点ずつ選ぶ場合は (1) と同じ表示を使う。固定した d に対する y の個数は $2m - 2|d|$ であり、 $|d| \leq m-1$ であるから

$$\sum_{d=-(m-1)}^{m-1} (2m - 2|d|) = 2m + 2 \sum_{d=1}^{m-1} (2m - 2d) = 2m + 4m(m-1) - 2m(m-1) = 2m^2$$

通りである。2 つの場合は互いに排反なので、一直線上にある 3 点は

$$2m(2m-1)(m-1) + 2m^2 = 2m(2m^2 - 2m + 1)$$

通りである。ゆえに

$$p_{2m} = 1 - \frac{2m(2m^2 - 2m + 1)}{m(6m-1)(6m-2)} = 1 - \frac{2(2m^2 - 2m + 1)}{(6m-1)(6m-2)}$$

である。

3 別解・背景

三列にまたがる一直線上の配置は、両端の点から数えることもできます。両端の y 座標を r, s とすると、中央の高さは $(r+s)/2$ です。これが整数になる条件は、 r, s の偶奇が等しいことです。両端が 1 から n までにあれば、その平均も同じ範囲に入ります。

$n = 5$ では奇数が三個、偶数が二個なので、配置の個数は $3^2 + 2^2 = 13$ です。 $n = 2m$ ではどちらも m 個なので、 $m^2 + m^2 = 2m^2$ となります。左列と右列は区別されるため、 (r, s) と (s, r) は $r \neq s$ なら異なる配置です。等差数列の増分を足し上げる主解と、両端の偶奇を数えるこの方法は、同じ三点の集合を別の情報で表したものです。