大学入試過去問シリーズ

東京大学

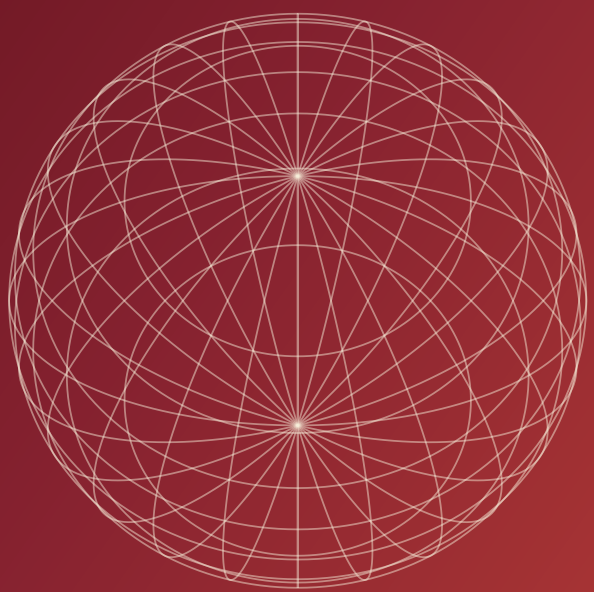
理系（前期・後期）

数学

1987-2026

過去問

40 年分



解答編

解説・答案・別解

Evolton

大学入試過去問シリーズ

東京大学

理系数学

1987〜2026 年度　前期・後期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton

はじめに

本書は、東京大学の前期・後期日程に出題された理系数学を収録した解答編です。1987〜2026 年度のうち、収録年度一覧に示す 40 年度を新しい順に掲載しています。

解説では、条件を数式に移すところから、解法を選ぶ理由、計算を進める順序まで述べています。答案には試験場で書く論証をまとめ、別解・背景には他の見方や関連する考え方を添えました。

共通問題も、各区分における小問の順序と番号に従います。旧課程の選択問題や京都大学の理系甲・乙は、元の区分を併記します。

本書の使い方

まず問題を解き、方針が立たなかったところや論証を省いたところを残してください。解説で考え方を確認した後、答案を閉じてもう一度書くと、条件の扱いと計算の順序を確かめられます。別解は主解を理解してから読み、どの条件によってその方法が使えるかを比べてください。

収録範囲は前期 40 年（1987〜2026 年度)、後期 18 年（1990〜2007 年度）です。

収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	1
2025 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	14
2024 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	32
2023 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	45
2022 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	58
2021 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	73
2020 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	89
2019 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	104
2018 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	117
2017 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	130
2016 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	143
2015 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	155
2014 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	167
2013 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	179
2012 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	191
2011 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	203
2010 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	216
2009 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	229
2008 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	242
2007 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	255
2006 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	277
2005 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	299

年度	問題	ページ
2004 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	321
2003 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	343
2002 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	364
2001 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	386
2000 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	405
1999 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	428
1998 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	450
1997 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	473
1996 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	493
1995 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	512
1994 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	530
1993 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	551
1992 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	574
1991 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	594
1990 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問、後期 第 1 問、後期 第 2 問、後期 第 3 問	613
1989 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	634
1988 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	646
1987 年度	前期 第 1 問、前期 第 2 問、前期 第 3 問、前期 第 4 問、前期 第 5 問、前期 第 6 問	659

分野索引 …… 671

2026 年度 東京大学・理系 第 1 問（前期）

【数学（理系）第 1 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

(1) $-1 \leqq \theta \leqq 1$ における関数

$$f(\theta) = \sin\theta - \theta + \frac{\theta^3}{6}$$

の最大値 M と最小値 m を求めよ。

(2) (1) で求めた最大値 M に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{7\pi}{8} \leqq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x)\,dx \leqq \frac{7\pi}{8} + 4M.$$

解説

(1)の関数には、三角関数と三次式が混ざっています。一回微分しただけでは符号が分かりにくいので、導関数をさらに微分して調べてみましょう。$0 \leqq \theta \leqq 1$ では $f''(\theta) = \theta - \sin\theta \geqq 0$ ですから、f' は増加します。$f'(0) = 0$ と合わせると、この区間で $f' \geqq 0$、したがって f も増加することが分かります。

$t - \sin t \geqq 0$ を確かめるには、$h(t) = t - \sin t$ と置きます。$h(0) = 0, h'(t) = 1 - \cos t \geqq 0$ なので、h は 0 以上です。これを一段ずつ戻して、$f'' \geqq 0$ から $f' \geqq f'(0) = 0$、さらに $f \geqq f(0) = 0$ を得ます。$0 < t \leqq 1$ では途中の増加が厳密になるため、$M = f(1) > 0$ です。三次式の項があるからといって、近似式を用いる必要はありません。

負の θ についても同じ計算を繰り返す必要はありません。f は奇関数であるため、原点を中心としてグラフが点対称になります。正の側の最大値と負の側の最小値は、絶対値が等しく符号が逆です。さらに $f(0) = 0$ なので、$f(t)$ は t と同じ符号を持ちます。この符号の関係が、(2)の下側の評価に使われます。

指針　**前問の関数を積分の中に現す**

加法定理で $\sin(\cos x - x)$ を分ける。$\sin t = t - t^3/6 + f(t)$ に $t = \cos x$ を代入し、残る項を評価する。

(2)の積分は、そのまま原始関数を求めようとしても難しい形です。求められているのは積分の値ではなく不等式なので、計算できる部分と、上下から抑える部分に分けることを考えます。加法定理を用いると、$\sin(\cos x)\cos x$ と $-\cos(\cos x)\sin x$ の二項に分かれます。後者は $\sin(\cos x)$ の導関数です。積分の両端で $\cos x = 1$ となるため、この項の積分は 0 になります。

残る項には、(1)の f を組み込みます。f の定義を $\sin t$ について解き、$t = \cos x$ を代入すると

$$\sin(\cos x)\cos x = \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6} + f(\cos x)\cos x$$

です。最初の二項は、三角関数の次数を下げれば積分できます。ここから、示すべき不等式の下端 $7\pi/8$ が現れます。

残った項では、$\cos x$ が正とは限らないことに注意しましょう。$f(\cos x)$ だけを非負とすることはできません。しかし $tf(t) \geqq 0$ なので、積 $f(\cos x)\cos x$ は常に非負です。上から抑える際には $|f(t)| \leqq M$ を使い、

$$0 \leqq f(\cos x)\cos x \leqq M|\cos x|$$

とします。積分区間全体で $|\cos x|$ を積分すると 4 になるため、誤差の上限は $4M$ です。$|\cos x| \leqq 1$ だけを使うと $2\pi M$ となり、問題で指定された上限まで抑えられません。

負の t は $t=-s$、$0 \leqq s \leqq 1$ と書くと、$f(t)=-f(s) \leqq 0$ です。このときも $tf(t)=sf(s) \geqq 0$ となります。したがって積の下側の評価は、正の半分で求めた符号を負の半分へ移したものです。代入する $\cos x$ は常に $[-1,1]$ に入るため、(1) の評価を積分区間全体で使えます。

次数を下げる際には、$\cos^4 x=\{(1+\cos 2x)/2\}^2$ を展開し、$\cos^2 2x=(1+\cos 4x)/2$ ともう一度直します。一周期で定数項以外の積分が消えるので、計算可能な二項の差は $\pi-(3\pi/4)/6=7\pi/8$ です。誤差の上側では、$\cos x<0$ の区間でも積が正になるため、$M\cos x$ ではなく $M|\cos x|$ を使います。四つの四分の一周期で絶対値の積分は各 1 となり、合計 4 です。この四区間を含めた評価が、指定された上限に結び付きます。

2 答案

(1) $0 \leqq t \leqq 1$ で

$$f''(t)=t-\sin t \geqq 0, \qquad f'(0)=0$$

なので $f'(t) \geqq 0$、したがって f は増加する。f は奇関数だから、全区間の最大・最小は両端で取り、

$$M=\sin 1-\frac{5}{6}, \qquad m=-M.$$

また $f(0)=0$ より、$-1 \leqq t \leqq 1$ で

$$tf(t) \geqq 0, \qquad |f(t)| \leqq M.$$

(2) 求める積分を I とする。加法定理より

$$\sin(\cos x-x)=\sin(\cos x)\cos x - \cos(\cos x)\sin x.$$

第二項は $\sin(\cos x)$ の導関数であり、$0, 2\pi$ での値が等しいため積分は 0 となる。f の定義を使うと

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x-\frac{\cos^4 x}{6}\right)dx+E,$$
$$E=\int_0^{2\pi} f(\cos x)\cos x\,dx.$$

$\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$ および

$$\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

より

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\pi,$$
$$\int_0^{2\pi}\cos^4 x\,dx=\frac{3\pi}{4}.$$

したがって $I=7\pi/8+E$ である。一方、(1) より

$$0 \leqq f(\cos x)\cos x \leqq M|\cos x|$$

なので

$$0 \leqq E \leqq M\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=4M.$$

ゆえに

$$\frac{7\pi}{8} \leqq I \leqq \frac{7\pi}{8}+4M.$$

3 別解・背景

答案で使う $\sin t \leqq t$ も、微分から示せます。$h(t)=t-\sin t$ とおくと、$h(0)=0$、$h'(t)=1-\cos t \geqq 0$ です。したがって $t \geqq 0$ で $h(t) \geqq 0$ となります。本問ではこれを f'' の符号の判定に用いています。

また、$\cos^4 x$ の積分では

$$\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

と次数を下げます。0 から 2π までの積分では、後ろの二項はそれぞれ一周期以上をちょうど含むため 0 となります。一方、$|\cos x|$ は負の部分も上向きに折り返した関数なので、符号の相殺は起こりません。四つの四分の一周期の積分がそれぞれ 1 となり、全体で 4 です。この二つの積分の違いが、上限の係数を決めています。

2 2026 年度 東京大学・理系 第 2 問（前期）

【数学（理系）第 2 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点

$$(x, y) \quad (x, y \text{ は整数}, 1 \leqq x \leqq 3, 1 \leqq y \leqq n)$$

から相異なる 3 点を無作為に選ぶ。この 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。

(1) p_5 を求めよ。

(2) $m \geqq 2$ を整数とするとき，p_{2m} を求めよ。

1 解説

三角形ができる配置を直接数えるには、三点の位置関係を細かく分ける必要がありそうです。ここでは、三角形ができない場合を先に数えます。相異なる三点を選んでいるので、三角形にならないのは、三点が一直線上に並ぶときに限られます。

指針　一直線上の三点を二種類に分ける

縦の一列から三点を選ぶ場合と、三列から一点ずつ選ぶ場合を数える。後者では三つの y 座標が等差数列になる。

三点のうち二点が同じ縦列にあれば、その二点を通る直線は縦の直線です。三点目も一直線上にあるには、同じ列に属さなければなりません。したがって、それ以外の一直線上の配置は、$x = 1, 2, 3$ の各列から一点ずつ取る場合に限られます。この説明によって、二つの分類が重ならず、全場合を尽くすことが分かります。

三列から一点ずつ選んだ場合、x 座標の間隔はともに 1 です。一直線上にあるためには y 座標の増分も等しいので、

$$(1, y), \quad (2, y + d), \quad (3, y + 2d)$$

と表せます。y, d は整数です。$d = 0$ は水平な直線、$d > 0$ と $d < 0$ は傾きの向きが反対の直線を表します。後の和では、$d = 0$ を一回だけ、正負の d をそれぞれ数えます。

固定した $d \geqq 0$ では、最も低い点の高さが y、最も高い点の高さが $y+2d$ です。三点がすべて $1 \leqq y \leqq n$ の範囲に入る条件は $1 \leqq y \leqq n - 2d$ となり、選べる整数の個数は $n - 2d$ です。$d < 0$ でも、最も低い点と高い点の差は $2|d|$ なので、個数は $n - 2|d|$ となります。

(1)の $n = 5$ では、$|d| = 0, 1, 2$ だけが可能です。縦列の配置と三列にまたがる配置の個数を加え、全体の ${}_{15}\mathrm{C}_3$ から差し引きます。(2)では $n = 2m$ なので、$|d| \leqq m - 1$ です。$|d| = m$ を入れると個数が 0 となり、実際の配置はありません。

全体の選び方は、選んだ三点の順序を区別しない組合せです。一方、三列の場合には列の x 座標が固定されているので、(y, d) が決まれば選ばれた三点の集合も一意に決まります。この数え方で求めた個数を、さらに 3! 倍したり割ったりする必要はありません。

無作為に選ぶ相異なる三点の集合は、全て同じ確率です。全点数が $3n$ なので、分母は ${}_{3n}\mathrm{C}_3$ です。一直線上の集合を数えてこの分母で割れば、三角形にならない確率となり、1 から引くことで求める確率が得られます。「一直線上の三点を選んだ後の向き」のような追加の選択は、標本に含まれません。

$n = 5, d = 1$ なら $y = 1, 2, 3$ で三組、$d = 2$ なら $y = 1$ で一組です。$d = -1$ では $y = 3, 4, 5$、$d = -2$ では $y = 5$ となり、反対向きの配置も同数あります。$d = 0$ の水平五組は正負のどちらにも重ねず一度だけ数えます。この合計 13 と、縦の 30 を合わせて 43 組を除くので、三角形は $455 - 43 = 412$ 組です。

$n=2m$ では、正の d について

$$\sum_{d=1}^{m-1}(2m-2d)=2m(m-1)-m(m-1)=m(m-1)$$

です。負の分をもう一度足し、水平の $2m$ を加えると $2m^2$ となります。例えば $m=2$ では縦の 12 組と三列の 8 組を合わせて 20 組です。全 220 組からこれを除いて $p_4=10/11$ となり、一般式の代入とも一致します。

2 答案

(1) $n=5$ のとき，全 15 点から相異なる 3 点を選ぶ方法は ${}_{15}\mathrm{C}_3=455$ 通りである。三角形にならないのは 3 点が一直線上にある場合に限る。

3 点が同じ縦列にある場合は $3\cdot{}_5\mathrm{C}_3=30$ 通りである。同じ列に二点を選んだなら、それらを通る直線は鉛直なので、一直線上となるには三点目もその列になければならない。したがって同じ列に三点ある場合を除けば、一直線上の三点は三列から一点ずつ選ぶ場合だけである。一直線上にあるための必要十分条件は中央列の点が両端の点の中点になることであり，3 点は

$$(1,y),\qquad (2,y+d),\qquad (3,y+2d)$$

と表せる。両端の y 座標の差は $2d$ なので、中央点も格子点となる条件から d は整数である。$d\geqq 0$ なら $1\leqq y\leqq 5-2d$、$d<0$ なら $1-2d\leqq y\leqq 5$。したがって固定した整数 d に対して 3 つの y 座標がすべて 1 以上 5 以下となる y は $5-2|d|$ 個であり，$|d|\leqq 2$ である。よってこの場合は

$$\sum_{d=-2}^{2}(5-2|d|)=5+2\cdot 3+2\cdot 1=13$$

通りである。したがって非三角形は $30+13=43$ 通りなので

$$p_5=1-\frac{43}{455}=\frac{412}{455}$$

である。

(2) $n=2m$ とする。全事象は ${}_{6m}\mathrm{C}_3=m(6m-1)(6m-2)$ 通りである。同じ縦列に 3 点がある場合は $3\cdot{}_{2m}\mathrm{C}_3=2m(2m-1)(m-1)$ 通りである。

3 列から 1 点ずつ選ぶ場合は (1) と同じ表示を使う。固定した d に対する y の個数は $2m-2|d|$ であり，$|d|\leqq m-1$ であるから

$$\sum_{d=-(m-1)}^{m-1}(2m-2|d|)=2m+2\sum_{d=1}^{m-1}(2m-2d)=2m+4m(m-1)-2m(m-1)=2m^2$$

通りである。2 つの場合は互いに排反なので，一直線上にある 3 点は

$$2m(2m-1)(m-1)+2m^2=2m(2m^2-2m+1)$$

通りである。ゆえに

$$p_{2m}=1-\frac{2m(2m^2-2m+1)}{m(6m-1)(6m-2)}=1-\frac{2(2m^2-2m+1)}{(6m-1)(6m-2)}$$

である。

3 別解・背景

三列にまたがる一直線上の配置は、両端の点から数えることもできます。両端の y 座標を r,s とすると、中央の高さは $(r+s)/2$ です。これが整数になる条件は、r,s の偶奇が等しいことです。両端が 1 から n までにあれば、その平均も同じ範囲に入ります。

$n=5$ では奇数が三個、偶数が二個なので、配置の個数は $3^2+2^2=13$ です。$n=2m$ ではどちらも m 個なので、$m^2+m^2=2m^2$ となります。左列と右列は区別されるため、(r,s) と (s,r) は $r\neq s$ なら異なる配置です。等差数列の増分を足し上げる主解と、両端の偶奇を数えるこの方法は、同じ三点の集合を別の情報で表したものです。

3 2026 年度 東京大学・理系 第 3 問（前期）

【数学（理系）第 3 問（前期）】〈2026 年度・前期日程〉

座標空間の原点を中心とする半径 5 の球面 S を考える。S 上の相異なる 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしながら動く。

条件：P, Q は xy 平面上にあり，$\triangle PQR$ の重心は $G(2, 0, 1)$ である。

P, Q を結ぶ線分の中点を M とする。

(1) M の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2) 線分 PQ が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

1 解説

三点 P, Q, R をそれぞれ座標で表すと、未知数が多くなります。まず、重心と中点の関係を使ってみましょう。中点と重心の公式から

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OM}, \qquad \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OG}$$

です。したがって $\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{OM}$ が成り立ちます。$M=(u, v, 0)$ とおけば、R の座標も $(6-2u, -2v, 3)$ と決まります。

指針　中点の条件を先に求め、弦が通る点を後から固定する

重心条件と R の球面条件から M の円を求める。通過点 T を固定すると、T を通る弦の中点がその円上にあるかを調べられる。

(1)では、R が球面上にある条件を代入すると、M の座標について $(u-3)^2+v^2=4$ が得られます。しかし、この円を描くだけで軌跡が確定したとはいえません。その M を中点とする、相異なる二点 P, Q を選べるかも確かめます。P, Q は xy 平面と球面の交わりである半径 5 の円上にありますから、M がこの円の内部にあれば、OM に垂直な弦を作れます。M の円はその円板に内接し、接点 $(5, 0)$ だけでは弦が一点に縮みます。この一点を除けば $P \neq Q$ となります。また R の z 座標は 3 なので、R が P, Q と一致することはありません。

(2)では、動く弦を一本ずつ追う代わりに、調べたい点 $T=(x, y, 0)$ を固定します。円の中心から弦の中点へ引いた線は弦に垂直なので、T が弦の直線上にある条件は $\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{OM}=0$ です。ここに M の円の式を使うと

$$(x-6)u+yv=-5$$

となります。これは、固定した T に対して中点 (u, v) が満たす直線の式です。この直線と M の円が交われば、T を通る弦の候補が見つかります。

円と直線の共有点の有無は、円の中心から直線までの距離で判定します。得られる条件を整理すると双曲線の不等式になります。ただし、この計算だけでは弦を延長した直線上の点も含まれています。T が半径 5 の円板内にある条件を加えることで、実際の線分上の点に限ることができます。

最後に、選べる中点が除外点 $(5, 0)$ だけになる場合を調べます。その場合には中点の直線が円に $(5, 0)$ で接するので、直線は $u=5$ です。係数を比べると $T=(5, 0)$ となり、通過範囲からも同じ一点を除きます。図示では、円板と双曲線の共通部分を塗り、除外点を白丸にして、ほかの境界が含まれることと区別します。

中点の円の式を展開すると $u^2+v^2=6u-5$ です。この円では $1 \leqq u \leqq 5$ なので、$OM^2 \leqq 25$ となり、等号が成り立つのは $u=5, v=0$ だけです。よって他の点は厳密に半径 5 の円の内部にあり、長さが正の弦を作れます。三点の相異なる条件は、この弦の長さと R の高さ 3 によって確かめられます。

通過点の条件では、$\overrightarrow{MT}=(x-u,y-v,0)$ です。内積 0 から $xu+yv-u^2-v^2=0$ となり、中点の円式を代入すれば $(x-6)u+yv+5=0$ が得られます。円の中心 $(3,0)$ をこの直線の左辺へ入れる値が $3x-13$ であるため、距離式の分子もこの値の絶対値です。平方後は $(3x-13)^2 \leqq 4\{(x-6)^2+y^2\}$ となり、展開して $5(x-3)^2-4y^2 \leqq 20$ へ直せます。

共有点が除外点だけの場合、この直線は $u=5$ です。そのため $y=0$ かつ $5(x-6)+5=0$ となり、$x=5$ が決まります。この一点以外なら少なくとも一つ許される中点があり、円板内の T は弦の延長上ではなく弦の内部か端点へ入ります。中点の条件、直線上の条件、線分上の条件をこの順で使うことで、通過範囲の十分性まで示せます。

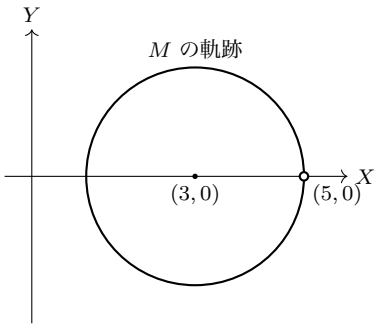
2 答案

(1) $M=(u,v,0)$ とする。重心条件 $\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{OM}$ から $R=(6-2u,-2v,3)$ となり、球面条件は

$$(6-2u)^2+4v^2+9=25.$$

よって $(u-3)^2+v^2=4$ である。この円は半径 5 の円板に内接し、$(5,0)$ 以外は内部にある。内部の点を中点とする弦 PQ が存在し、R は $z=3$ なので P,Q と異なる。$(5,0)$ では $P=Q$ となるため除く。求める軌跡は

$$(u-3)^2+v^2=4 \quad \text{ただし } (u,v)\neq(5,0).$$



(2) $T=(x,y,0)$ を通る弦の中点を $M=(u,v,0)$ とする。$OM \perp PQ$ より

$$\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{OM}=0, \qquad xu+yv=u^2+v^2.$$

中点の円の式から $u^2+v^2=6u-5$ なので

$$(x-6)u+yv+5=0.$$

この直線が中点の円と共有点を持つ条件は、中心 $(3,0)$ からの距離を用いて

$$\frac{|3x-13|}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}} \leqq 2.$$

これを整理すると

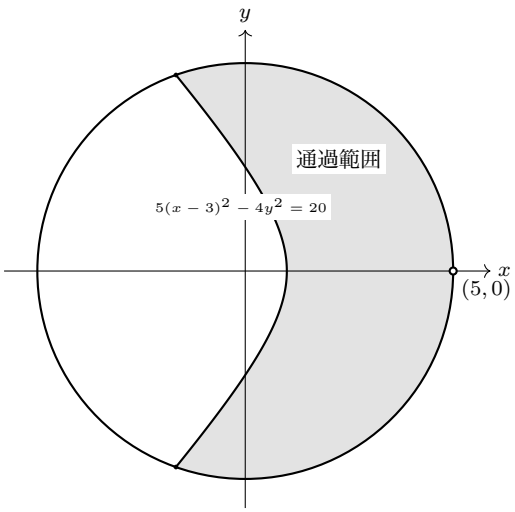
$$5(x-3)^2-4y^2 \leqq 20.$$

さらに、線分上にあるためには $x^2+y^2 \leqq 25$ が必要である。この円板内では距離式の分母は 0 にならない。

逆に、この二不等式を満たす T では中点の円と直線に共有点があり、T は対応する弦の直線上かつ円板内にあるので線分上にある。許される中点が $(5,0)$ だけになるのは、直線がそこでの接線 $u=5$ と一致するときであり、$T=(5,0)$ に限る。したがって求める範囲は

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25, \\ 5(x-3)^2-4y^2 \leqq 20 \end{cases} \quad \text{ただし } (x,y)\neq(5,0).$$

境界の交点は $(5,0)$ と $(-5/3,\pm 10\sqrt{2}/3)$ である。



3　別解・背景

中点から弦の両端を実際に作る式を書いてみます。$M = (u, v, 0)$、$\rho = \sqrt{u^2+v^2}$ とすると、中点の円上では $1 \leqq \rho < 5$ です。OM と垂直な単位ベクトルを $\vec{e} = (-v, u, 0)/\rho$ とおけば、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \sqrt{25-\rho^2}\,\vec{e}, \qquad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} - \sqrt{25-\rho^2}\,\vec{e}$$

と選べます。$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e} = 0$ より $OP^2 = OQ^2 = 25$ であり、P, Q の中点は M です。$\rho < 5$ なので二点は一致しません。この式から、軌跡の条件を満たす中点が実際に三角形を作ることまで確認できます。通過範囲の十分性でも、この弦の直線と円板の共通部分が線分 PQ であることを使っています。