

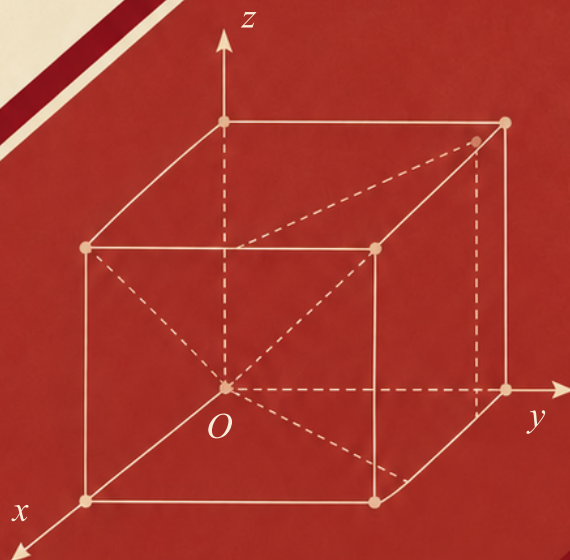
東京大学

理系（前期）

数学

過去問10年

2017-2026



解答編

解説・答案・別解

株式会社Fermion 編

大学入試過去問シリーズ

東京大学

理系数学

2017～2026 年度 前期日程

解答編

株式会社 Fermion 編

Evolton



はじめに

本書は、東京大学の前期日程で出題された理系数学を、2017～2026年度の10年分収録した解答編です。各問を「問題」「解説」「答案」「別解・背景」の順に掲載しました。問題を解く前に答えを探すための本としても使えますが、自分で考えた筋道と解説を比べ、次に同じ考え方を使えるようにするところまで取り組んでください。

数学の解答は、出来上がったものを読むと、最初から道筋が分かっていたように見えることがあります。しかし、実際に問題を前にしたときには、文字をどう置か、どの条件から使うか、計算を進めるべきか、別の見方を探すべきかといった判断が必要です。そこで本書の解説では、式変形の結果に加えて、その方法を選ぶ理由を述べるようにしました。例えば、積分の中に対数があるからといって、必ず原始関数を求める必要があるわけではありません。前の小問の不等式を使えば、積分できる式ではさんで極限を求められる場合があります。解説を読むときは、どの条件や問い方が、その方針を考えるきっかけになったかにも目を向けてください。

答案には、条件から結論へ進むために必要な論証をまとめています。解説を読んで分かったつもりになっても、答案を自分の言葉で書こうとすると、場合分けの理由や不等号の向きが曖昧だったと気づくことがあります。答えが一致したときにも、途中で使った条件が同じか、端点や等号の場合を落としていないかを比べてみましょう。領域を求める問題なら、条件を満たす点が入る領域に加えて、領域内の点が実際に元の条件から作れることも必要です。こうした確認を自分で書けるようになると、解法を覚える学習から一歩進めます。

別解・背景には、同じ問題を他の方法で見るとの説明を置きました。初めて読むときに、すべての方法を同時に覚える必要はありません。まず主解の考え方を理解し、その後で、別の方法では何が簡単になり、何を確かめる必要があるのかを比べてください。図形の問題を座標で解いたなら、図形的な説明ではどの長さや角度を使っているかを見ます。式で求めた最大値を図で読み直すと、等号が成立する配置の意味が分かることもあります。別解を読む目的は、解法の数を増やすことより、条件を異なる方向から理解することにあります。



本書の使い方

一年度を通して取り組む場合は、まず問題編などから問題だけを読み、当時の試験時間と選択条件に従って解いてみてください。解けた問題と解けなかった問題を分けるだけでなく、方針が立たなかったのか、計算の途中で止まったのか、論証を書き切れなかったのかを残しておく、解説を読む目的がはっきりします。解説を開いた後も、自分が考えた方法が使えないかを一度確かめてみましょう。本書の方法と異なっている、条件を正しく扱い、結論まで示していれば有効な解答です。

復習では、解説を閉じて、もう一度答案を書いてください。前回の計算をそのまま写すより、どの条件を最初に使うかを考え直す方が、自分が理解できたところと、まだ説明できないところを区別できます。とくに、文字で割る前の符号、場合分けの境目、求めた値が実現する条件は、読み流しやすい箇所です。正答した問題でも、これらの理由を口頭で説明できるか、短く書けるかを確かめてください。一度の解き直しで十分に書けなかったところは、日を置いて再び取り組むとよいでしょう。

分野を絞って学習するときは、巻末の分野索引から該当する問題を探せます。同じ分野でも、方程式を解く問題、値を評価する問題、解の存在を示す問題では、必要な考え方が異なります。続けて数問を解いた後、使った道具と、その道具が使える条件を整理してみてください。

収録年度によって、数学の履修課程が異なります。各問題は出題当時の条件を保って掲載しています。年度をさかのぼって学習するときは、現在の履修範囲と照らし合わせながら、取り組む問題を選んでください。



収録年度・問題

年度	問題	ページ
2026 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	1
2025 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	15
2024 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	33
2023 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	46
2022 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	59
2021 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	74
2020 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	90
2019 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	106
2018 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	119
2017 年度	第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 4 問、第 5 問、第 6 問	133
分野索引		147



2026 年度 東京大学・理系 第 1 問

【数学（理系）第 1 問】〈2026 年度・前期日程〉

(1) $-1 \leq \theta \leq 1$ における関数

$$f(\theta) = \sin \theta - \theta + \frac{\theta^3}{6}$$

の最大値 M と最小値 m を求めよ。

(2) (1) で求めた最大値 M に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{7\pi}{8} \leq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x) dx \leq \frac{7\pi}{8} + 4M.$$

1

解説

(1)の関数には、三角関数と三次式が混ざっています。一回微分しただけでは符号が分かりにくいので、導関数をさらに微分して調べてみましょう。 $0 \leq \theta \leq 1$ では $f''(\theta) = \theta - \sin \theta \geq 0$ ですから、 f' は増加します。 $f'(0) = 0$ と合わせると、この区間で $f' \geq 0$ 、したがって f も増加することが分かります。

$t - \sin t \geq 0$ を確かめるには、 $h(t) = t - \sin t$ と置きます。 $h(0) = 0, h'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ なので、 h は 0 以上です。これを一段ずつ戻して、 $f'' \geq 0$ から $f' \geq f'(0) = 0$ 、さらに $f \geq f(0) = 0$ を得ます。 $0 < t \leq 1$ では途中の増加が厳密になるため、 $M = f(1) > 0$ です。三次式の項があるからといって、近似式を用いる必要はありません。

負の θ についても同じ計算を繰り返す必要はありません。 f は奇関数であるため、原点を中心としてグラフが点対称になります。正の側の最大値と負の側の最小値は、絶対値が等しく符号が逆です。さらに $f(0) = 0$ なので、 $f(t)$ は t と同じ符号を持ちます。この符号の関係が、(2)の下側の評価に使われます。

指針 前問の関数を積分の中に現す

加法定理で $\sin(\cos x - x)$ を分ける。 $\sin t = t - t^3/6 + f(t)$ に $t = \cos x$ を代入し、残る項を評価する。

(2)の積分は、そのまま原始関数を求めようとしても難しい形です。求められているのは積分の値ではなく不等式なので、計算できる部分と、上下から抑える部分に分けることを考えます。加法定理を用いると、 $\sin(\cos x) \cos x$ と $-\cos(\cos x) \sin x$ の二項に分かれます。後者は $\sin(\cos x)$ の導関数です。積分の両端で $\cos x = 1$ となるため、この項の積分は 0 になります。

残る項には、(1)の f を組み込みます。 f の定義を $\sin t$ について解き、 $t = \cos x$ を代入すると

$$\sin(\cos x) \cos x = \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6} + f(\cos x) \cos x$$

です。最初の二項は、三角関数の次数を下げれば積分できます。ここから、示すべき不等式の下端 $7\pi/8$ が現れます。

残った項では、 $\cos x$ が正とは限らないことに注意しましょう。 $f(\cos x)$ だけを非負とすることはできません。しかし $tf(t) \geq 0$ なので、積 $f(\cos x) \cos x$ は常に非負です。上から抑える際には $|f(t)| \leq M$ を使い、

$$0 \leq f(\cos x) \cos x \leq M |\cos x|$$

とします。積分区間全体で $|\cos x|$ を積分すると 4 になるため、誤差の上限は $4M$ です。 $|\cos x| \leq 1$ だけを使うと $2\pi M$ となり、問題で指定された上限まで抑えられません。

負の t は $t = -s$, $0 \leq s \leq 1$ と書くと, $f(t) = -f(s) \leq 0$ です。このときも $tf(t) = sf(s) \geq 0$ となります。したがって積の下側の評価は、正の半分で求めた符号を負の半分に移したものです。代入する $\cos x$ は常に $[-1, 1]$ に入るため、(1) の評価を積分区間全体で使えます。

次数を下げる際には、 $\cos^4 x = \{(1 + \cos 2x)/2\}^2$ を展開し、 $\cos^2 2x = (1 + \cos 4x)/2$ ともう一度直します。一周で定数項以外の積分が消えるので、計算可能な二項の差は $\pi - (3\pi/4)/6 = 7\pi/8$ です。誤差の上側では、 $\cos x < 0$ の区間でも積が正になるため、 $M \cos x$ ではなく $M|\cos x|$ を使います。四つの四分の一周期で絶対値の積分は各 1 となり、合計 4 です。この四区間を含めた評価が、指定された上限に結び付きます。

2 答案

(1) $0 \leq t \leq 1$ で

$$f''(t) = t - \sin t \geq 0, \quad f'(0) = 0$$

なので $f'(t) \geq 0$ 、したがって f は増加する。 f は奇関数だから、全区間の最大・最小は両端で取り、

$$M = \sin 1 - \frac{5}{6}, \quad m = -M.$$

また $f(0) = 0$ より、 $-1 \leq t \leq 1$ で

$$tf(t) \geq 0, \quad |f(t)| \leq M.$$

(2) 求める積分を I とする。加法定理より

$$\begin{aligned} \sin(\cos x - x) &= \sin(\cos x) \cos x \\ &\quad - \cos(\cos x) \sin x. \end{aligned}$$

第二項は $\sin(\cos x)$ の導関数であり、 $0, 2\pi$ での値が等しいため積分は 0 となる。 f の定義を使うと

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6} \right) dx + E,$$

$$E = \int_0^{2\pi} f(\cos x) \cos x \, dx.$$

$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ および

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx &= \pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos^4 x \, dx &= \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

したがって $I = 7\pi/8 + E$ である。一方、(1) より

$$0 \leq f(\cos x) \cos x \leq M|\cos x|$$

なので

$$0 \leq E \leq M \int_0^{2\pi} |\cos x| \, dx = 4M.$$

ゆえに

$$\frac{7\pi}{8} \leq I \leq \frac{7\pi}{8} + 4M.$$

3 別解・背景

答案で使う $\sin t \leq t$ も、微分から示せます。 $h(t) = t - \sin t$ とおくと、 $h(0) = 0$ 、 $h'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ です。したがって $t \geq 0$ で $h(t) \geq 0$ となります。本問ではこれを f'' の符号の判定に用いています。

また、 $\cos^4 x$ の積分では

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

と次数を下げて、 0 から 2π までの積分では、後ろの二項はそれぞれ一周以上をちょうど含むため 0 となります。一方、 $|\cos x|$ は負の部分も上向きに折り返した関数なので、符号の相殺は起こりません。四つの四分の一周期の積分がそれぞれ 1 となり、全体で 4 です。この二つの積分の違いが、上限の係数を決めています。



2026 年度 東京大学・理系 第 2 問

【数学（理系）第 2 問】〈2026 年度・前期日程〉

 n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点

$$(x, y) \quad (x, y \text{ は整数}, 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq n)$$

から相異なる 3 点を無作為に選ぶ。この 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。(1) p_5 を求めよ。(2) $m \geq 2$ を整数とすると、 p_{2m} を求めよ。

1 解説

三角形ができる配置を直接数えるには、三点の位置関係を細かく分ける必要があります。ここでは、三角形ができない場合を先に数えます。相異なる三点を選んでいるので、三角形にならないのは、三点が一直線上に並ぶときに限られます。

指針 一直線上の三点を二種類に分ける

縦の列から三点を選ぶ場合と、三列から一点ずつ選ぶ場合を数える。後者では三つの y 座標が等差数列になる。

三点のうち二点が同じ縦列にあれば、その二点を通る直線は縦の直線です。三点目も一直線上にあるには、同じ列に属さなければなりません。したがって、それ以外の一直線上の配置は、 $x = 1, 2, 3$ の各列から一点ずつ取る場合に限られます。この説明によって、二つの分類が重ならず、全場合を尽くすことが分かります。

三列から一点ずつ選んだ場合、 x 座標の間隔はともに 1 です。一直線上にあるためには y 座標の増分も等しいので、

$$(1, y), \quad (2, y + d), \quad (3, y + 2d)$$

と表せます。 y, d は整数です。 $d = 0$ は水平な直線、 $d > 0$ と $d < 0$ は傾きの向きが反対の直線を表します。後の和では、 $d = 0$ を一回だけ、正負の d をそれぞれ数えます。

固定した $d \geq 0$ では、最も低い点の高さが y 、最も高い点の高さが $y + 2d$ です。三点がすべて $1 \leq y \leq n$ の範囲に入る条件は $1 \leq y \leq n - 2d$ となり、選べる整数の個数は $n - 2d$ です。 $d < 0$ でも、最も低い点と高い点の差は $2|d|$ なので、個数は $n - 2|d|$ となります。

(1) の $n = 5$ では、 $|d| = 0, 1, 2$ だけが可能です。縦列の配置と三列にまたがる配置の個数を加え、全体の ${}_{15}C_3$ から差し引きます。(2) では $n = 2m$ なので、 $|d| \leq m - 1$ です。 $|d| = m$ を入れると個数が 0 となり、実際の配置はありません。

全体の選び方は、選んだ三点の順序を区別しない組合せです。一方、三列の場合には列の x 座標が固定されているので、 (y, d) が決まれば選ばれた三点の集合も一意に決まります。この数え方で求めた個数を、さらに 3! 倍したり割ったりする必要はありません。

無作為に選ぶ相異なる三点の集合は、全て同じ確率です。全点数が $3n$ なので、分母は ${}_{3n}C_3$ です。一直線上の集合を数えてこの分母で割れば、三角形にならない確率となり、1 から引くことで求める確率が得られます。「一直線上の三点を選んだ後の向き」のような追加の選択は、標本に含まれません。

$n = 5, d = 1$ なら $y = 1, 2, 3$ で三組、 $d = 2$ なら $y = 1$ で一組です。 $d = -1$ では $y = 3, 4, 5$ 、 $d = -2$ では $y = 5$ となり、反対向きの配置も同数あります。 $d = 0$ の水平五組は正負のどちらにも重ねず一度だけ数えます。この合計 13 と、縦の 30 を合わせて 43 組を除くので、三角形は $455 - 43 = 412$ 組です。

$n = 2m$ では、正の d について

$$\sum_{d=1}^{m-1} (2m - 2d) = 2m(m-1) - m(m-1) = m(m-1)$$

です。負の分をもう一度足し、水平の $2m$ を加えると $2m^2$ となります。例えば $m = 2$ では縦の 12 組と三列の 8 組を合わせて 20 組です。全 220 組からこれを除いて $p_4 = 10/11$ となり、一般式の代入とも一致します。

2 答案

(1) $n = 5$ のとき、全 15 点から相異なる 3 点を選ぶ方法は ${}_{15}C_3 = 455$ 通りである。三角形にならないのは 3 点が一直線上にある場合に限る。

3 点が同じ縦列にある場合は $3 \cdot {}_5C_3 = 30$ 通りである。同じ列に二点を選んだなら、それらを通る直線は鉛直なので、一直線上となるには三点目もその列になければならない。したがって同じ列に三点ある場合を除けば、一直線上の三点は三列から一点ずつ選ぶ場合だけである。一直線上にあるための必要十分条件は中央列の点が両端の点の中間点になることであり、3 点は

$$(1, y), \quad (2, y + d), \quad (3, y + 2d)$$

と表せる。両端の y 座標の差は $2d$ なので、中央点も格子点となる条件から d は整数である。 $d \geq 0$ なら $1 \leq y \leq 5 - 2d$ 、 $d < 0$ なら $1 - 2d \leq y \leq 5$ 。したがって固定した整数 d に対して 3 つの y 座標がすべて 1 以上 5 以下となる y は $5 - 2|d|$ 個であり、 $|d| \leq 2$ である。よってこの場合は

$$\sum_{d=-2}^2 (5 - 2|d|) = 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 13$$

通りである。したがって非三角形は $30 + 13 = 43$ 通りなので

$$p_5 = 1 - \frac{43}{455} = \frac{412}{455}$$

である。

(2) $n = 2m$ とする。全事象は ${}_{6m}C_3 = m(6m-1)(6m-2)$ 通りである。同じ縦列に 3 点がある場合は $3 \cdot {}_{2m}C_3 = 2m(2m-1)(m-1)$ 通りである。

3 列から 1 点ずつ選ぶ場合は (1) と同じ表示を使う。固定した d に対する y の個数は $2m - 2|d|$ であり、 $|d| \leq m-1$ であるから

$$\sum_{d=-(m-1)}^{m-1} (2m - 2|d|) = 2m + 2 \sum_{d=1}^{m-1} (2m - 2d) = 2m + 4m(m-1) - 2m(m-1) = 2m^2$$

通りである。2 つの場合は互いに排反なので、一直線上にある 3 点は

$$2m(2m-1)(m-1) + 2m^2 = 2m(2m^2 - 2m + 1)$$

通りである。ゆえに

$$p_{2m} = 1 - \frac{2m(2m^2 - 2m + 1)}{m(6m-1)(6m-2)} = 1 - \frac{2(2m^2 - 2m + 1)}{(6m-1)(6m-2)}$$

である。

3 別解・背景

三列にまたがる一直線上の配置は、両端の点から数えることもできます。両端の y 座標を r, s とすると、中央の高さは $(r+s)/2$ です。これが整数になる条件は、 r, s の偶奇が等しいことです。両端が 1 から n までにあれば、その平均も同じ範囲に入ります。

$n = 5$ では奇数が三個、偶数が二個なので、配置の個数は $3^2 + 2^2 = 13$ です。 $n = 2m$ ではどちらも m 個なので、 $m^2 + m^2 = 2m^2$ となります。左列と右列は区別されるため、 (r, s) と (s, r) は $r \neq s$ なら異なる配置です。等差数列の増分を足し上げる主解と、両端の偶奇を数えるこの方法は、同じ三点の集合を別の情報で表したものです。