

広島大学 2017 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \tan \frac{\pi}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める. 次の問いに答えよ. (1)
 $a_2 = \tan \frac{\pi}{6}$, $a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$ であることを示せ. (2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し, それが正しいことを数学的
 帰納法により証明せよ. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

漸化式の形を正接の半角公式として読む. $a_n = \tan \alpha_n$ とみると $a_{n+1} = \tan(\alpha_n/2)$ になるため, 一般項を $\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$ と推定する. 極限は $x \rightarrow 0$ で $\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$ を用いる.

【解答】

(1) $a_1 = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ であるから

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$$

である. また

$$a_3 = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1/3+1}+1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{12}$$

である.

(2) (1) から

$$a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

と推定される. これを数学的帰納法で示す. $n = 1$ では成り立つ. $a_n = \tan \alpha$, $\alpha = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$ とすると, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ であるから $\cos \alpha > 0$ であり

$$\sqrt{a_n^2 + 1} = \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

である. したがって

$$a_{n+1} = \frac{\tan \alpha}{\frac{1}{\cos \alpha} + 1} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$$

となる. よってすべての自然数 n について

$$a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

である.

(3) $x_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$ とおくと, $x_n \rightarrow 0$ かつ $2^n x_n = \frac{2\pi}{3}$ である. (2) より

$$2^n a_n = 2^n \tan x_n = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\tan x_n}{x_n}$$

である. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \frac{2\pi}{3}$$

である.

▶ 解法 2

【方針】

漸化式を有理化して $(\sqrt{1+a_n^2}-1)/a_n$ とし、正接の半角公式へ直接対応させる。

【解答】

(1) $a_1 = \sqrt{3}$ から

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}, \quad a_3 = 2 - \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{12}.$$

(2) 分母を有理化すると

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{1+a_n^2}-1}{a_n}.$$

$a_n = \tan \alpha_n$ とおけば右辺は

$$\frac{1 - \cos \alpha_n}{\sin \alpha_n} = \tan \frac{\alpha_n}{2}.$$

よって帰納的に

$$a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

(3) $x_n = \pi/(3 \cdot 2^{n-1})$ とすれば

$$2^n a_n = \frac{2\pi \tan x_n}{3 x_n} \rightarrow \frac{2\pi}{3}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 12 分程度。漸化式を正接の半角公式と見抜けるかが中心である。帰納法では $\cos \alpha > 0$ を確認して平方根を外すこと、極限では角が 0 に近づくことを明示すると答案が安定する。

【第 2 問】

$a > 0$ とする。次の問いに答えよ。(1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geq 0$ における最小値を、 a を用いて表せ。(2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。 A^3 を求めよ。(3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1 、点 $(0, a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。 C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。(4) 座標平面において、点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0, a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $f'(t) = 3t^2 - 2a$ から $t \geq 0$ での最小値を求める。(3) では円と曲線の交点条件を $u = x^2$ に直し、(1) の三次式 $f(u)$ の正の解の個数に帰着する。(4) も距離の二乗を $a^2 + uf(u)$ と表し、 $f(u) \geq 0$ となる条件を使う。

【解答】

(1)

$$f'(t) = 3t^2 - 2a$$

である。 $t \geq 0$ では、 $f(t)$ は $0 \leq t < \sqrt{\frac{2a}{3}}$ で減少し、 $t > \sqrt{\frac{2a}{3}}$ で増加する。よって最小値は $t = \sqrt{\frac{2a}{3}}$ でとり、

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = 1 - \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}}$$

である。

(2) (1) の最小値が 0 であるから

$$1 = \frac{4A}{3}\sqrt{\frac{2A}{3}}$$

である。両辺を二乗して

$$1 = \frac{16A^2}{9} \cdot \frac{2A}{3} = \frac{32A^3}{27}$$

となる。したがって

$$A^3 = \frac{27}{32}$$

である。

(3) 円 C_2 の方程式は $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ である。 $y = x^4$ を代入すると

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2$$

すなわち

$$x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) = 0$$

である。 $u = x^2$ とおくと、 $x = 0$ の共有点 $(0, 0)$ のほかに、 $u > 0$ で

$$u^3 - 2au + 1 = 0$$

を満たすものを調べればよい。これは (1) の $f(u) = 0$ である。

$A = \sqrt[3]{\frac{27}{32}}$ とおく。(1), (2) より、 $0 < a < A$ では $f(u) > 0$ となり正の解はない。 $a = A$ では正の重解を一つもつ。 $a > A$ では正の解を二つもつ。よって共有点の個数は

$$\begin{cases} 1 & (0 < a < A), \\ 3 & (a = A), \\ 5 & (a > A) \end{cases}$$

である。

(4) $P = (x, x^4)$ とし、 $u = x^2 \geq 0$ とおく。点 $(0, a)$ との距離の二乗は

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2 + u(u^3 - 2au + 1) = a^2 + uf(u)$$

である。 $x = 0$ のとき距離は a であるから、最小値が a に等しいための条件は、すべての $u \geq 0$ で $uf(u) \geq 0$ となることである。これは $u > 0$ で $f(u) \geq 0$ となることと同値であり、(1), (2) より

$$0 < a \leq \sqrt[3]{\frac{27}{32}}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

円との共有点と距離を同じ式 $F(u) = u^3 - 2au + 1$ の符号問題へ統一し、接する境界を $F = F' = 0$ から求める。

【解答】

(1) $F'(u) = 3u^2 - 2a$ より最小点は $u = \sqrt{2a/3}$ 、最小値は

$$1 - \frac{4a}{3} \sqrt{\frac{2a}{3}}.$$

(2) 境界 $F = F' = 0$ を満たす A は

$$A^3 = \frac{27}{32}.$$

(3) 円と $y = x^4$ の共有点は

$$x^2 F(x^2) = 0.$$

$A = (27/32)^{1/3}$ とすると、正の根は $a < A$ で 0 個、 $a = A$ で 1 個、 $a > A$ で 2 個。各正根から $\pm x$ が出るので共有点数は順に

$$1, 3, 5.$$

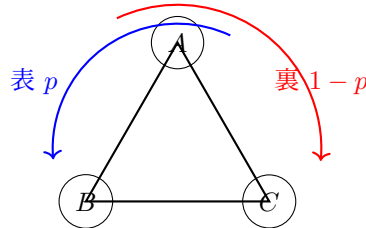
(4) 距離の二乗は $a^2 + uF(u)$ 。これが常に a^2 以上となる条件は $F(u) \geq 0$ ($u > 0$) だから

$$0 < a \leq \sqrt[3]{\frac{27}{32}}.$$

【総評】 難度 6, 計算量 6. 想定時間は 20 分程度。(1) の最小値を以後の共有点個数と距離最小に使い回す誘導型の問題である。 $u = x^2$ への置換で正の解の個数を整理すること, $x = 0$ の共有点を数え落とさないことが重要である。

【第 3 問】

表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1 - p$ であるようなコインがある。ただし, $0 < p < 1$ である。このとき, 正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。 R は最初 A にあり, 全部で $(2N + 3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k ($k = 2, 3, \dots, 2N + 3$) とする。次の問いに答えよ。(1) P_2, P_3 を求めよ。(2) P_{2m}, P_{2m+1} ($2 \leq m \leq N + 1$) を求めよ。(3) $p = \frac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N + 3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

$q = 1 - p$ とおく。初めて A に戻るまでは, B と C の間だけを往復する必要があるため, 最初に B へ行く場合と C へ行く場合に分けて確率を掛ける。(3) では $p = \frac{1}{2}$ のとき $P_k = 2^{1-k}$ となることを使い, 最初の戻り時刻と二度目の戻り時刻の間隔を足し合わせる。

【解答】

(1) $q = 1 - p$ とおく。2 回目に初めて A に戻るのは

$$A \rightarrow B \rightarrow A, \quad A \rightarrow C \rightarrow A$$

の場合であるから

$$P_2 = pq + qp = 2pq$$

である。3 回目に初めて A に戻るのは

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A, \quad A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$$

の場合であるから

$$P_3 = p^3 + q^3$$

である。

(2) 最初に B へ移動した場合, A へ戻らないためには, 戻る直前まで $B, C, B, C, \dots$ と移動するしかない。最初に C へ移動した場合も同様である。

$2m$ 回目に初めて戻る場合は, 最初に B へ行く経路の確率が $p^m q^m$, 最初に C へ行く経路の確率も $p^m q^m$ である。よって

$$P_{2m} = 2(pq)^m$$

である。

$2m + 1$ 回目に初めて戻る場合は, 最初に B へ行く経路の確率が $p^{m+2} q^{m-1}$, 最初に C へ行く経路の確率が $q^{m+2} p^{m-1}$ である。よって

$$P_{2m+1} = (pq)^{m-1} (p^3 + q^3)$$

である。

(3) $p = q = \frac{1}{2}$ のとき, (1), (2) よりすべての $k \geq 2$ について

$$P_k = 2^{1-k}$$

である。二度目に A へ戻る時刻が $2N+3$ であるとする。最初に戻る時刻を i とすると、 $i = 2, 3, \dots, 2N+1$ であり、二度目までの間隔は $2N+3-i$ である。したがって

$$Q = \sum_{i=2}^{2N+1} P_i P_{2N+3-i}$$

である。各項は

$$2^{1-i} \cdot 2^{1-(2N+3-i)} = 2^{-2N-1}$$

であり、項数は $2N$ 個であるから

$$Q = 2N \cdot 2^{-2N-1} = \frac{N}{2^{2N}}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

A への初帰還を更新過程として扱い、帰還間隔の分布を経路の交互性から求める。(3) は 2 つの独立な帰還間隔の畳み込みで数える。

【解答】

$q = 1 - p$ とする。(1)

$$P_2 = 2pq, \quad P_3 = p^3 + q^3.$$

(2) 初帰還までは B, C を交互に通る。長さ $2m$ の 2 経路は各 $(pq)^m$ 、長さ $2m+1$ の 2 経路はそれぞれ $p^{m+2}q^{m-1}, q^{m+2}p^{m-1}$ 。よって

$$P_{2m} = 2(pq)^m, \quad P_{2m+1} = (pq)^{m-1}(p^3 + q^3).$$

(3) $p = q = 1/2$ では $P_k = 2^{1-k}$ 。2 度目の帰還時刻が $2N+3$ となる確率は

$$\sum_{i=2}^{2N+1} P_i P_{2N+3-i} = 2N \cdot 2^{-2N-1} = \frac{N}{2^{2N}}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 22 分程度。初めて戻る条件を、 B と C の強制的な往復として捉えることが核心である。(3) は一度 A に戻ると同じ状況から再開するため、戻り時刻の分割和にできる。偶奇による経路の終点を取り違えないように整理したい。

【第 4 問】

座標空間内の平面 $H: z = 0$ とその上の曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。 C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。 C 上の 2 点 $A(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), B(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ に対し、線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする。ただし、平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H 、平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。(1) 立体 V と平面 H の共通部分の面積を求めよ。(2) 立体 V を平面 $x = t$ ($-1 < t < 2$) で切ったとき、断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。(3) 立体 V の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

平面 T は線分 AB を含むので $z = x + 1$ と求まる。したがって V の底面は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ のうち $-1 \leq x \leq 2$ の部分である。(2) は $x = t$ で切った長方形の断面を求め、(3) はその断面積を積分する。

【解答】

(1) 平面 T は AB を含むから、 y によらず

$$z = m(x + 1)$$

と表せる。平面 H との角が 45° であり、 z 軸との交点の z 座標が正であるから $m = 1$ である。よって

$$T: z = x + 1$$

である。

V は z 軸と交わる方の立体なので、底面は

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 2$$

で表される。この面積は

$$\int_{-1}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

である。半径 2 の円の上半分で考えると、 $-2 \leq x \leq -1$ の部分の面積を引けばよいので

$$2\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

(2) $-1 < t < 2$ で平面 $x = t$ により切ると、 y 方向の長さは

$$2\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} = \sqrt{4 - t^2}$$

であり、 z 方向の高さは $0 \leq z \leq t+1$ だから $t+1$ である。よって

$$S(t) = (t+1)\sqrt{4-t^2}$$

である。

(3) 体積は

$$\int_{-1}^2 (t+1)\sqrt{4-t^2} dt$$

である。ここで

$$\int_{-1}^2 t\sqrt{4-t^2} dt = \sqrt{3}$$

であり、(1) より

$$\int_{-1}^2 \sqrt{4-t^2} dt = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。したがって求める体積は

$$\frac{4\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

楕円を $x = 2u$ で単位円へ変換し、底面積と x 方向の一次モーメントを別々に計算して体積を求める。

【解答】

(1) 平面は $T: z = x + 1$ 。底面は楕円内の $-1 \leq x \leq 2$ であり、

$$B = \int_{-1}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $x = t$ の弦長は $\sqrt{4-t^2}$ 、高さは $t+1$ なので

$$S(t) = (t+1)\sqrt{4-t^2}.$$

(3) 体積は底面上の高さ $x+1$ の積分、すなわち面積 B と一次モーメントの和である。

$$\int_{-1}^2 x\sqrt{4-x^2} dx = \sqrt{3}.$$

したがって

$$V = B + \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【総評】 難度 6, 計算量 6。想定時間は 18 分程度。平面 T を $z = x + 1$ と決めると、断面積の積分に素直に落ちる。底面積と

$$\int \sqrt{4-x^2} dx$$

の評価で円の扇形と三角形の面積を正しく使うことが計算上の山である。

【第 5 問】

x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $O(0,0)$ および $A(50,14)$ を考える。次の問いに答えよ。(1) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ。(2) m を自然数とする。 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ を満たす格子点 P のうち、長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。 P_1 および P_2 を求めよ。(3) P_m を (2) で定めた格子点とする。自然数 k に対し、ベクトル $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}}$ を成分表示せよ。(4) P_m を (2) で定めた格子点とする。 Q を $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $OQP_{16}P_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

内積条件を一次不定方程式 $25x + 7y = 3$ に直し、一般解を整数 n で表す。 OP^2 を n の二次式にして長さ順を決める。(4) は四角形を二つのベクトルで張られる平行四辺形として表し、内部または周上の格子点条件を係数 r, s の範囲と整数条件から直接絞り込む。

【解答】

(1) $P = (x, y)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 50x + 14y = 6$$

である。すなわち

$$25x + 7y = 3$$

である。 $x = -1, y = 4$ はこれを満たすので、求める格子点の一つは

$$P = (-1, 4)$$

である。

(2) $25x + 7y = 3$ の整数解は、整数 n を用いて

$$x = -1 + 7n, \quad y = 4 - 25n$$

と表される。このとき

$$OP^2 = (-1 + 7n)^2 + (4 - 25n)^2 = 674n^2 - 214n + 17$$

である。整数 n について調べると、最小は $n = 0$ 、次に小さいのは $n = 1$ である。したがって

$$P_1 = (-1, 4), \quad P_2 = (6, -21)$$

である。

(3) (2) の二次式の値は

$$n = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

の順に小さくなる。よって $k \geq 1$ に対して

$$P_{2k} = (-1 + 7k, 4 - 25k), \quad P_{2k+1} = (-1 - 7k, 4 + 25k)$$

である。したがって

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = (-14k, 50k)$$

であり、また

$$P_{2k+2} = (-1 + 7(k+1), 4 - 25(k+1))$$

より

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}} = (7, -25)$$

である。

(4) $P_{14} = P_{2 \cdot 7} = (48, -171)$, $P_{16} = P_{2 \cdot 8} = (55, -196)$ であるから

$$\overrightarrow{P_{14}P_{16}} = (7, -25)$$

であり、 $Q = (7, -25)$ である。

四角形 $OQP_{16}P_{14}$ は、 $u = (7, -25)$, $v = (48, -171)$ で張られる平行四辺形である。この平行四辺形の周および内部の点は

$$(x, y) = su + rv \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq r \leq 1)$$

と表される。すなわち

$$x = 7s + 48r, \quad y = -25s - 171r$$

である。これより

$$3r = 25x + 7y, \quad 3s = -171x - 48y$$

となる。 (x, y) が格子点なら r, s はいずれも $\frac{1}{3}$ の整数倍である。

$$r = \frac{i}{3}, \quad s = \frac{j}{3} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3) \text{ とおくと}$$

$$x = \frac{48i + 7j}{3}$$

である。 x が整数となるには $j = 0$ または $j = 3$ でなければならない。したがって格子点は $s = 0$ または $s = 1$ 上に限られる。実際に $i = 0, 1, 2, 3$ を代入して、求める格子点は

$$(0, 0), (16, -57), (32, -114), (48, -171),$$

および

$$(7, -25), (23, -82), (39, -139), (55, -196)$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

一次不定方程式の解集合を 1 本の格子直線として表し、原点からの距離を平方完成して順序づける。(4) は平行四辺形の行列式と合同条件で格子点を列挙する。

【解答】

(1) $25x + 7y = 3$ の一解は

$$P = (-1, 4).$$

(2) 一般解は

$$P(n) = (-1 + 7n, 4 - 25n),$$

$$|OP(n)|^2 = 674n^2 - 214n + 17.$$

整数 n で最小は 0, 次は 1 だから

$$P_1 = (-1, 4), \quad P_2 = (6, -21).$$

(3) 距離順は $n = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$ 。よって

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = (-14k, 50k), \quad \overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}} = (7, -25).$$

(4) $P_{14} = (48, -171), P_{16} = (55, -196), Q = (7, -25)$ 。平行四辺形は $u = (7, -25), v = (48, -171)$ で張られ, $|\det(u, v)| = 3$ 。格子点は 2 本の辺上に各 4 点あり,

$$(0, 0), (16, -57), (32, -114), (48, -171),$$

$$(7, -25), (23, -82), (39, -139), (55, -196).$$

【総評】 難度 7, 計算量 7。想定時間は 25 分程度。内積条件を一次不定方程式に落とした後, 長さ順と平行四辺形内の格子点をどちらも整数パラメータで処理する問題である。(3) の並び順を誤ると (4) の四角形が変わるため, OP^2 の二次式で順序を確認することが重要である。