

入 学 試 験 問 題

数 学



広島大学 2018 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

$$(A) \quad t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$$

と因数分解できる実数 x, y で

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

を満たすものが存在する。

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

$$(B) \quad t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$$

と因数分解できる実数 x, y で

$$0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2$$

を満たすものが存在する。

(3) 点 (x, y) が 4 点

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (1, 2), \quad (0, 2)$$

を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、点

$$(x + y, xy)$$

の動く範囲の面積を求めよ。

第 2 問

複素数平面上の 4 点

$$A(\alpha), \quad B(\beta), \quad C(\gamma), \quad D(\delta)$$

を頂点とする凸四角形 $ABCD$ を考える。頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並ぶものとする。

四角形の外側に、4 辺 AB, BC, CD, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形

$$APB, \quad BQC, \quad CRD, \quad DSA$$

を作る。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P を表す複素数を求めよ。
- (2) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるための必要十分条件を、四角形 $ABCD$ の性質として答えよ。
- (3) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるならば、 $PQRS$ は正方形であることを示せ。

第 3 問

次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し

$$1 + t \leq e^t$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq 2 - \sqrt{2}.$$

第 4 問

0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し、数字を見て元に戻す。この操作を N 回繰り返し、出た数字を順に

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_N$$

とする。ただし $N \geq 3$ とする。

さらに

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

を用いて、数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

により定める。各 n に対し

$$P_n = P(X_n = \alpha), \quad Q_n = P(X_n = \alpha^2)$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ。
- (3) $X_n = 1$ となる確率を P_n, Q_n を用いて表せ。
- (4) P_{n+1} を P_n を用いて表せ。
- (5) P_n を求めよ。

第 5 問

座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 - 3x$$

と、条件

$$b > a^3 - 3a$$

を満たしながら動く点 $P(a, b)$ を考える。

点 P に対し、二つの不等式

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1$$

で表される正方形領域を B とする。 B と C が共有点 Q をもち、共有点が B の境界線上にしかないとき、 B と C は点 Q で接するというにすることにする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形を描き、さらに

$$P = (-2, 3)$$

のときの領域 B を図示せよ。

(2) B と C が $x < -1$ の範囲の点で接するように P が動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

(3) B と C がある点で接するように P が動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

(4) (3) の軌跡は、ある関数

$$y = f(x)$$

のグラフで表せる。この関数は $x = 0$ で微分可能であることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)