

広島大学 2018 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

$$(A) \quad t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$$

と因数分解できる実数 x, y で

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

を満たすものが存在する。

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

$$(B) \quad t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$$

と因数分解できる実数 x, y で

$$0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2$$

を満たすものが存在する。

(3) 点 (x, y) が 4 点

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (1, 2), \quad (0, 2)$$

を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、点

$$(x + y, xy)$$

の動く範囲の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$(u, v) = (x + y, xy)$ として、和 u を固定したときの積 v の範囲を求める。条件 (A)(B) の範囲をそれぞれ区間分割で出し、長方形全体では $x \in [0, 1], y \in [0, 2]$ として上下境界の差を積分する。

【解答】

(1) 条件 (A) では $u = x + y, v = xy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ である。固定した u に対して積 xy の最大は $x = y = \frac{u}{2}$ のときである。端の条件も合わせると、存在範囲は

$$0 \leq u \leq 1 \text{ のとき } 0 \leq v \leq \frac{u^2}{4},$$

$$1 \leq u \leq 2 \text{ のとき } u - 1 \leq v \leq \frac{u^2}{4}$$

である。

(2) 条件 (B) では $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ である。 $u = x + y$ を固定して $v = x(u - x)$ の範囲を調べると、存在範囲は

$$1 \leq u \leq 2 \text{ のとき } 0 \leq v \leq u - 1,$$

$$2 \leq u \leq 3 \text{ のとき } 2u - 4 \leq v \leq u - 1$$

である。

(3) 長方形全体では $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ である。 $(u, v) = (x + y, xy)$ とおくと、像の範囲は

$$0 \leq u \leq 2 \text{ のとき } 0 \leq v \leq \frac{u^2}{4},$$

$$2 \leq u \leq 3 \text{ のとき } 2u - 4 \leq v \leq u - 1$$

である。よって面積は

$$\int_0^2 \frac{u^2}{4} du + \int_2^3 (3-u) du = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

2 次式 $p(t) = t^2 - ut + v$ の値を端点 $t = 0, 1, 2$ で調べる。根が指定区間に入る条件を $p(0), p(1), p(2)$ の符号と判別式へ翻訳し、 uv 平面の境界を直接得る。

【解答】

(1)

$$p(t) = t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$$

とおく。根 x, y がともに $[0, 1]$ に入るとき

$$u = x + y, \quad v = xy.$$

まず根が実数である条件は

$$u^2 - 4v \geq 0 \iff v \leq \frac{u^2}{4}.$$

また $x, y \geq 0$ から

$$u \geq 0, \quad v \geq 0,$$

さらに $1-x, 1-y \geq 0$ から

$$2-u \geq 0, \quad (1-x)(1-y) = 1-u+v \geq 0.$$

したがって

$$0 \leq u \leq 2, \quad \max(0, u-1) \leq v \leq \frac{u^2}{4}.$$

すなわち

$$\begin{cases} 0 \leq v \leq \frac{u^2}{4} & (0 \leq u \leq 1), \\ u-1 \leq v \leq \frac{u^2}{4} & (1 \leq u \leq 2). \end{cases}$$

(2)

根を $x \leq y$ とすると、条件 (B) は

$$0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2$$

である。上に開く放物線 $p(t)$ の符号を使えば、これは

$$p(0) \geq 0, \quad p(1) \leq 0, \quad p(2) \geq 0$$

と同値である。それぞれ

$$v \geq 0, \quad 1-u+v \leq 0, \quad 4-2u+v \geq 0$$

だから

$$\max(0, 2u-4) \leq v \leq u-1.$$

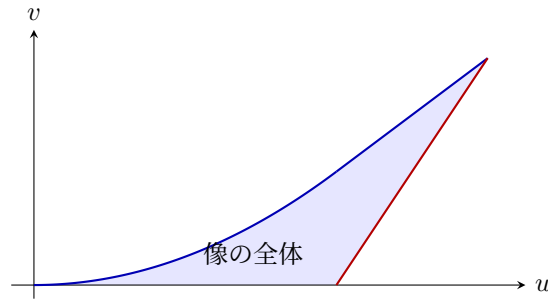
非空となる u の範囲も含めて書くと

$$\begin{cases} 0 \leq v \leq u-1 & (1 \leq u \leq 2), \\ 2u-4 \leq v \leq u-1 & (2 \leq u \leq 3). \end{cases}$$

(3)

長方形全体の像は (1), (2) の領域の和集合である。したがって

$$\begin{cases} 0 \leq v \leq \frac{u^2}{4} & (0 \leq u \leq 2), \\ 2u-4 \leq v \leq u-1 & (2 \leq u \leq 3). \end{cases}$$



よって面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \frac{u^2}{4} du + \int_2^3 \{(u-1) - (2u-4)\} du \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6, 計算量 5. 想定時間は 18 分程度. 根の和と積の変換を図形領域として処理する問題である. 上端が放物線になる区間と直線になる区間を正確に分けること, 面積では重複でなく長方形全体の像として積分することが重要である. 別解では根の区間条件を 2 次式の端点での符号へ翻訳し, 固定した和による方法と独立に境界不等式を導いた.

【第 2 問】

複素数平面上の 4 点

$$A(\alpha), \quad B(\beta), \quad C(\gamma), \quad D(\delta)$$

を頂点とする凸四角形 $ABCD$ を考える. 頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並ぶものとする.

四角形の外側に, 4 辺 AB, BC, CD, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形

$$APB, \quad BQC, \quad CRD, \quad DSA$$

を作る. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 P を表す複素数を求めよ.
- (2) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるための必要十分条件を, 四角形 $ABCD$ の性質として答えよ.
- (3) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるならば, $PQRS$ は正方形であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

各辺の外側に作る直角二等辺三角形の頂点を, 辺の中点から辺ベクトルを -90° 回転した点として表す. 平行四辺形条件は対角線の中点一致 $p+r=q+s$ で判定し, 最後は隣り合う辺ベクトルが 90° 回転の関係になることを示す.

【解答】

(1) 四角形 $ABCD$ の頂点は反時計回りなので, 辺 AB の外側は, A から B へ向かう向きの右側である. したがって, 点 P を表す複素数を p とすると

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{i(\beta - \alpha)}{2} = \frac{(1+i)\alpha + (1-i)\beta}{2}$$

である.

(2) 同様に

$$q = \frac{(1+i)\beta + (1-i)\gamma}{2}, \quad r = \frac{(1+i)\gamma + (1-i)\delta}{2}, \quad s = \frac{(1+i)\delta + (1-i)\alpha}{2}$$

である. 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であることは $p+r=q+s$ と同値である. 計算すると

$$p+r-q-s = i(\alpha - \beta + \gamma - \delta)$$

であるから, 条件は

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

である. これは四角形 $ABCD$ の対角線の中点が一致することを表す. よって必要十分条件は, 四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることである.

(3) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形であるとする。 $u = \beta - \alpha$, $v = \gamma - \beta$ とおくと, $\delta - \gamma = -u$ である。すると

$$q - p = \frac{(1+i)u + (1-i)v}{2},$$

$$r - q = \frac{(1+i)v - (1-i)u}{2} = i(q - p)$$

である。したがって隣り合う辺 PQ と QR は長さが等しく, 互いに垂直である。(2) より $PQRS$ は平行四辺形でもあるから, $PQRS$ は正方形である。

▶ 解法 2

【方針】

各斜辺ベクトルを時計回りに 90° 回転して半分にしたベクトルを、その辺の中点へ加える。まず図で外側の符号を固定し、対角線の中点条件と隣辺の回転関係をベクトルとして整理する。

【解答】

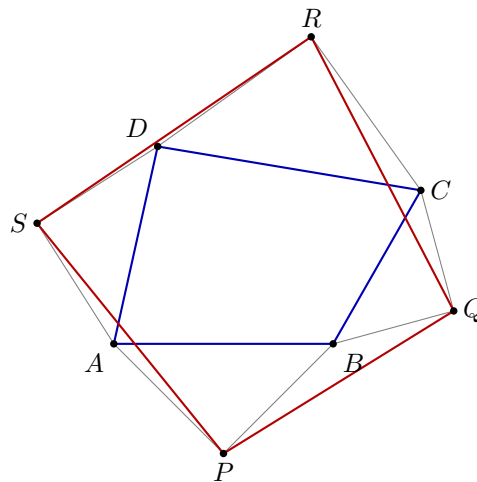
(1)
複素数に $-i$ を掛けることは、対応するベクトルを時計回りに 90° 回転することを表す。辺 AB の中点から外側の頂点 P へ向かうベクトルは

$$-\frac{i}{2}(\beta - \alpha)$$

だから

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{i}{2}(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{(1+i)\alpha + (1-i)\beta}{2}.$$



(2)

同じ回転を各辺に施すと

$$q = \frac{(1+i)\beta + (1-i)\gamma}{2},$$

$$r = \frac{(1+i)\gamma + (1-i)\delta}{2},$$

$$s = \frac{(1+i)\delta + (1-i)\alpha}{2}.$$

四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるための必要十分条件は、対角線の中点が一致すること、すなわち

$$p + r = q + s$$

である。左辺と右辺の差を計算すると

$$p + r - q - s = i(\alpha - \beta + \gamma - \delta).$$

よって条件は

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

これは AC と BD の中点が一致する条件なので、 $ABCD$ が平行四辺形であることと同値である。

(3)

$ABCD$ が平行四辺形であるとし

$$u = \beta - \alpha, \quad v = \gamma - \beta$$

とおく。上の頂点表示から

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{(1+i)u + (1-i)v}{2},$$

$$\overrightarrow{QR} = \frac{(1+i)v - (1-i)u}{2}.$$

ここで

$$i\overrightarrow{PQ} = \frac{(i-1)u + (1+i)v}{2} = \overrightarrow{QR}.$$

したがって $\overrightarrow{QR}$ は $\overrightarrow{PQ}$ を反時計回りに 90° 回転したベクトルである。ゆえに

$$PQ = QR, \quad PQ \perp QR.$$

(2) より $PQRS$ は平行四辺形でもあるので、4 辺が等しく 1 つの角が直角である。したがって $PQRS$ は正方形である。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 想定時間は 22 分程度。複素数による 90 度回転を外側の向きまで含めて正しく設定することが核心である。平行四辺形条件を対角線の中点一致で処理し、最後に隣辺の回転関係を示せば簡潔にまとまる。別解では外向きの回転を図で固定したうえで、隣辺ベクトルがちょうど (i) 倍になることから正方形を直接確認した。

【第 3 問】

次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し

$$1 + t \leq e^t$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq 2 - \sqrt{2}.$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $e^t - t - 1$ の増減で示す。(2) は分母を有理化して $\frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$ とする。(3) は (1) を $t = -\sin x$ と $t = \sin x$ に使い、下側は $1 - \sin x$, 上側は $1/(1 + \sin x)$ で評価する。

【解答】

(1) $\phi(t) = e^t - t - 1$ とおくと、 $\phi'(t) = e^t - 1$ である。したがって $t < 0$ で $\phi'(t) < 0$, $t > 0$ で $\phi'(t) > 0$ であり、 $\phi(t)$ は $t = 0$ で最小値 0 をとる。よってすべての実数 t に対して

$$1 + t \leq e^t$$

である。

(2)

$$\frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = \left[\tan x - \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \sqrt{2}$$

である。

(3) (1) で $t = -\sin x$ とすると

$$1 - \sin x \leq e^{-\sin x}$$

である。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin x) dx = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。

また, (1) で $t = \sin x$ とすると $e^{\sin x} \geq 1 + \sin x$ であるから

$$e^{-\sin x} \leq \frac{1}{1 + \sin x}$$

である。したがって (2) より

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq 2 - \sqrt{2}$$

である。以上より求める不等式が示された。

▶ 解法 2

【方針】

(1) では指数関数のグラフが $t = 0$ における接線の上側にあることを、2 階微分で確認する。(2) では被積分関数を、 $\tan x - \sec x$ の導関数として一度に見抜く。

【解答】

(1)

$$F(t) = e^t - (1 + t)$$

とおくと

$$F''(t) = e^t > 0.$$

したがって $F'(t)$ は単調増加し

$$F'(0) = 0$$

だから、 F は $t < 0$ で減少し、 $t > 0$ で増加する。ゆえに

$$F(t) \geq F(0) = 0,$$

すなわち

$$1 + t \leq e^t.$$

これは $y = e^t$ が $t = 0$ における接線 $y = 1 + t$ の上側にあることを表す。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x} \right) &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{1 + \sin x}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \left[\tan x - \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= (1 - \sqrt{2}) - (0 - 1) \\ &= 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(3)

(1) に $t = -\sin x$ を代入すると

$$1 - \sin x \leq e^{-\sin x}.$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx &\geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

一方、(1) に $t = \sin x$ を代入すると

$$1 + \sin x \leq e^{\sin x}.$$

両辺は正なので逆数をとって

$$e^{-\sin x} \leq \frac{1}{1 + \sin x}.$$

したがって (2) より

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx = 2 - \sqrt{2}.$$

以上で両側の不等式が示された。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 12 分程度。(1) の指数不等式を上下評価の両方に使う誘導問題である。(2) の有理化と、(3) で不等号の向きを取り違えないことが採点上の要点である。積分は問題文・方針・解答のすべてで独立表示にし、別解では原始関数を直接微分して符号を検算できる構成にした。

【第 4 問】

0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し、数字を見て元に戻す。この操作を N 回繰り返し、出た数字を順に

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_N$$

とする。ただし $N \geq 3$ とする。

さらに

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

を用いて、数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

により定める。各 n に対し

$$P_n = P(X_n = \alpha), \quad Q_n = P(X_n = \alpha^2)$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ。
- (3) $X_n = 1$ となる確率を P_n, Q_n を用いて表せ。
- (4) P_{n+1} を P_n を用いて表せ。
- (5) P_n を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$\alpha^3 = 1$ を用いて、状態を $1, \alpha, \alpha^2$ の 3 つに分ける。1 回の操作で掛けられる値の確率は 1 が $1/2$, α と α^2 がそれぞれ $1/4$ 。この状態遷移から P_{n+1} の一次漸化式を作る。

【解答】

(1) $Z_1 = 1$ のときだけ $X_1 = \alpha$ であるから

$$P_1 = \frac{1}{4}$$

である。

(2) $\alpha^3 = 1$ である。 $Z_{n+1} = 0, 3$ のとき $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となるので、その確率は

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。

(3) X_n は $1, \alpha, \alpha^2$ のいずれかである。したがって

$$P(X_n = 1) = 1 - P_n - Q_n$$

である。

(4) $X_{n+1} = \alpha$ となるのは、次の三つの場合である。

$$X_n = \alpha \text{ かつ } \alpha^{Z_{n+1}} = 1,$$

$$X_n = 1 \text{ かつ } \alpha^{Z_{n+1}} = \alpha,$$

$$X_n = \alpha^2 \text{ かつ } \alpha^{Z_{n+1}} = \alpha^2$$

である。よって

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}(1 - P_n - Q_n) + \frac{1}{4}Q_n = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}$$

である。

(5) (4) より

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(P_n - \frac{1}{3} \right)$$

である。 $P_1 = \frac{1}{4}$ だから

$$P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

状態 $1, \alpha, \alpha^2$ の対称性に注目する。初めから $P_1 = Q_1$ であり、遷移確率も α と α^2 を入れ替えて不変なので $P_n = Q_n$ が保たれる。最後は一次漸化式を有限等比級数として解く。

【解答】

(1)

$$X_1 = \alpha^{Z_1} = \alpha$$

となるのは $Z_1 = 1$ のときだけだから

$$P_1 = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\alpha^3 = 1$$

であり、 $Z_{n+1} = 0, 3$ の 2 通りで

$$\alpha^{Z_{n+1}} = 1.$$

したがって確率は

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(3)

X_n の取り得る値は $1, \alpha, \alpha^2$ の 3 つだけなので

$$P(X_n = 1) = 1 - P_n - Q_n.$$

(4)

1 回で掛ける値の分布は

掛ける値	1	α	α^2
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

である。初項では

$$P_1 = Q_1 = \frac{1}{4}.$$

また遷移表は α と α^2 を入れ替えても同じなので、帰納的に

$$P_n = Q_n$$

がすべての n で成り立つ。

したがって $X_n = 1$ の確率は $1 - 2P_n$ であり

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}(1 - 2P_n) + \frac{1}{4}P_n \\ &= \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(5)

漸化式を繰り返し代入すると

$$P_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} P_1 + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

$P_1 = 1/4$ と有限等比級数の和を使えば

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4} \frac{1 - (1/4)^{n-1}}{1 - 1/4} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \\ &= \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 12 分程度。複素数の累乗を 3 状態の確率遷移として見れば、実質は一次漸化式の問題である。 $Z = 0, 3$ が同じ状態を与えること, (4) で Q_n が消える整理を正確に書くことが重要である。別解では $P_n = Q_n$ が遷移の対称性から保たれることを先に示し、漸化式を有限等比級数として直接解いた。

【第 5 問】

座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 - 3x$$

と、条件

$$b > a^3 - 3a$$

を満たしながら動く点 $P(a, b)$ を考える。

点 P に対し、二つの不等式

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1$$

で表される正方形領域を B とする。 B と C が共有点 Q をもち、共有点が B の境界線上にしかないとき、 B と C は点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形を描き、さらに

$$P = (-2, 3)$$

のときの領域 B を図示せよ。

(2) B と C が $x < -1$ の範囲の点で接するように P が動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

(3) B と C がある点で接するように P が動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

(4) (3) の軌跡は、ある関数

$$y = f(x)$$

のグラフで表せる。この関数は $x = 0$ で微分可能であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

領域 B は中心 (a, b) 、上下左右に 1 だけ離れた正方形である。 P が曲線の上側にあるので、接する条件は区間 $[a-1, a+1]$ 上の $x^3 - 3x$ の最大値が $b-1$ に等しいこととして扱える。最大値を端点と極大点 -1 で比較し、軌跡を場合分けで求める。

【解答】

(1) $y = x^3 - 3x$ とおくと、 $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ である。したがって $x = -1$ で極大値 2、 $x = 1$ で極小値 -2 をとる三次曲線である。

$P = (-2, 3)$ のとき、領域 B は

$$-3 \leq x \leq -1, \quad 2 \leq y \leq 4$$

で表される正方形である。

(2) 接点の x 座標を s とする。 $s < -1$ で接するとき、曲線はその付近で増加しているの、正方形の下辺の右端側で接する。したがって

$$a = s - 1, \quad b = (s^3 - 3s) + 1$$

である。 $s < -1$ より $a < -2$ であり、 $s = a + 1$ として

$$b = (a+1)^3 - 3(a+1) + 1 = a^3 + 3a^2 - 1$$

を得る。よって点 $P = (a, b)$ の軌跡は

$$y = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x < -2)$$

である。

(3) $g(x) = x^3 - 3x$ とおく。 $P = (a, b)$ に対して、 B と C が接する条件は

$$b = 1 + \max_{a-1 \leq x \leq a+1} g(x)$$

である。 $g(x)$ は -1 で極大値 2 をとり、端点での値は

$$g(a-1) + 1 = a^3 - 3a^2 + 3, \quad g(a+1) + 1 = a^3 + 3a^2 - 1$$

である。これらを比較すると、軌跡は次の関数のグラフで表される。

$$y = f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x \leq -2), \\ 3 & (-2 \leq x \leq 0), \\ x^3 - 3x^2 + 3 & \left(0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \\ x^3 + 3x^2 - 1 & \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x\right). \end{cases}$$

(4) (3) より、 $x = 0$ の左側では $f(x) = 3$ 、右側では $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ である。したがって

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 - 3x) = 0$$

である。左右の微分係数が一致するので、 $y = f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

▶ 解法 2

【方針】

正方形の底辺の高さ $b-1$ が、幅 2 の区間 $[a-1, a+1]$ における $g(x) = x^3 - 3x$ の最大値に一致すると考える。最大値の候補を左端・右端・極大点 -1 の 3 つに絞り、その上包絡線として軌跡を作る。

【解答】

(1)

$$g(x) = x^3 - 3x$$

とおくと

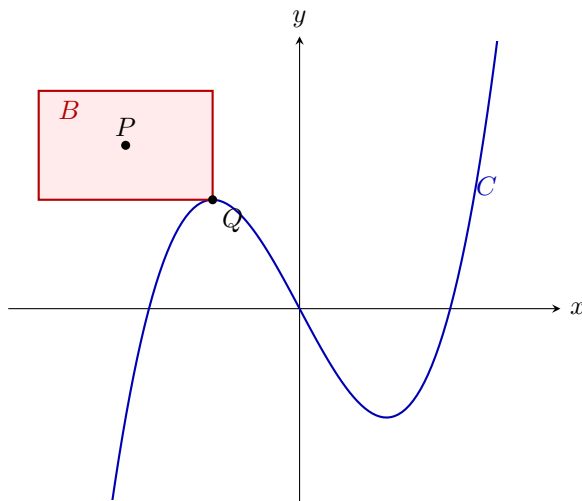
$$g'(x) = 3(x-1)(x+1).$$

したがって $x = -1$ で極大値 2、 $x = 1$ で極小値 -2 をとる。

$P = (-2, 3)$ のとき

$$B = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq -1, 2 \leq y \leq 4\}.$$

この正方形は曲線と $(-1, 2)$ で接する。



(2)

接点の x 座標を $s < -1$ とする。この範囲で g は増加しているので、区間 $[a-1, a+1]$ 上の最大値は右端 $s = a+1$ である。接点は正方形の下辺上にあるから

$$b-1 = g(a+1).$$

よって

$$b = 1 + (a+1)^3 - 3(a+1) = a^3 + 3a^2 - 1.$$

また $a+1 < -1$ より $a < -2$ である。したがって軌跡は

$$y = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x < -2).$$

(3)

一般に接する条件は

$$b = 1 + \max_{a-1 \leq t \leq a+1} g(t).$$

最大値の候補は、区間の両端と、区間内に入るときの極大点 $t = -1$ である。3 つの候補は

$$R(a) = 1 + g(a+1) = a^3 + 3a^2 - 1,$$

$$L(a) = 1 + g(a-1) = a^3 - 3a^2 + 3,$$

$$M = 1 + g(-1) = 3.$$

$a \leq -2$ では区間全体が -1 の左側にあり、 g は増加するので最大は $R(a)$ である。

$-2 \leq a \leq 0$ では区間が -1 を含み、両端の値も $M = 3$ 以下だから最大は M である。

$a \geq 0$ では極大点は区間に入らず、両端を比較すればよい。差は

$$L(a) - R(a) = 4 - 6a^2.$$

したがって

$$0 \leq a \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

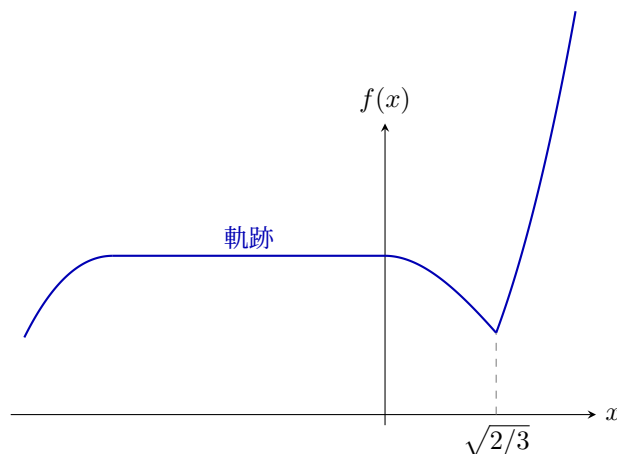
では $L(a)$ 、

$$a \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

では $R(a)$ が最大である。

以上より

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1 & (x \leq -2), \\ 3 & (-2 \leq x \leq 0), \\ x^3 - 3x^2 + 3 & \left(0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \\ x^3 + 3x^2 - 1 & \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x\right). \end{cases}$$



(4)

$x = 0$ の左側では $f(x) = 3$ 、右側では

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

また $f(0) = 3$ で連続である。左右の差商は

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 - 3x) = 0.$$

両者が一致するので、 f は $x = 0$ で微分可能である。

【総評】 難度 8, 計算量 7. 想定時間は 28 分程度。正方形と曲線の接触を、幅 2 の区間上における曲線の最大値として捉える発想が必要である。極大点と両端の値の比較で場合分けを作り、最後に接点での微分可能性を左右から確認することが採点上の山場である。別解では最大値候補 (L,R,M) の上包絡線として全軌跡を組み立て、元の曲線・正方形と軌跡の 2 図で場合分けの意味を可視化した。