

広島大学 2019 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$a > 0, r > 0$ とし、数列 $\{a_n\}$ を初項 a 、公比 r の等比数列とする。また、数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。
 $b_1 = a_1, b_{n+1} = b_n a_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 次の問いに答えよ。

(1) b_n を a, r および n を用いて表せ。

(2) 一般項が $c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$ である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち、 $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$ とする。

このとき、一般項が $d_n = 2^{M_n}$ である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。

▶ 解法 1

【方針】

b_n は $a_1 a_2 \cdots a_n$ であることを帰納的に読み取り、等比数列の指数和を計算する。 c_n は対数を用いて一次式に直し、 M_n は等差数列の平均が初項と第 n 項の平均になることから求める。

【解答】

(1) 定義より $b_1 = a_1, b_{n+1} = b_n a_{n+1}$ であるから、帰納的に

$$b_n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

である。ここで $a_k = ar^{k-1}$ だから

$$b_n = a^n r^{0+1+\cdots+(n-1)} = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

である。

(2) (1) より

$$\log_2 b_n = n \log_2 a + \frac{n(n-1)}{2} \log_2 r$$

である。したがって

$$c_n = \log_2 a + \frac{n-1}{2} \log_2 r$$

となり、 $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2} \log_2 r$ は n によらず一定である。よって $\{c_n\}$ は等差数列である。

(3) $\{c_n\}$ は等差数列であるから、初項から第 n 項までの平均は

$$M_n = \frac{c_1 + c_n}{2} = \log_2 a + \frac{n-1}{4} \log_2 r$$

である。ゆえに

$$d_n = 2^{M_n} = ar^{\frac{n-1}{4}}$$

である。したがって

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = r^{\frac{1}{4}}$$

は一定であり、 $\{d_n\}$ は等比数列である。

▶ 解法 2

【方針】

各項そのものではなく、最初から底 2 の対数をとる。 $A = \log_2 a$ 、 $R = \log_2 r$ とおけば、積の漸化式は和の漸化式に変わり、 c_n, M_n, d_n を一続きで求められる。

【解答】

(1) $A = \log_2 a$ 、 $R = \log_2 r$ 、 $B_n = \log_2 b_n$ とおく。 $a_{n+1} = ar^n$ だから

$$B_{n+1} = B_n + \log_2 a_{n+1} = B_n + A + nR, \quad B_1 = A.$$

したがって

$$B_n = nA + \frac{n(n-1)}{2}R.$$

指数に戻して

$$b_n = 2^{B_n} = a^n r^{n(n-1)/2}.$$

(2)

$$c_n = \frac{B_n}{n} = A + \frac{n-1}{2}R.$$

よって

$$c_{n+1} - c_n = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \log_2 r$$

は一定であり、 $\{c_n\}$ は等差数列である。

(3) 一般項を直接平均すると

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(A + \frac{k-1}{2}R \right) = A + \frac{n-1}{4}R.$$

したがって

$$d_n = 2^{M_n} = ar^{(n-1)/4}, \quad \frac{d_{n+1}}{d_n} = r^{1/4}.$$

公比が n によらないので、 $\{d_n\}$ は初項 a 、公比 $r^{1/4}$ の等比数列である。

【総評】 難度 4、計算量 3。想定時間は 10 分程度。積で定まる b_n を対数で和へ移すと、指数和・等差数列・平均・指数への復元が一本につながる。 $a, r > 0$ は対数と実数の 4 乗根を正當に扱うための条件でもある。(2) では公差 $\frac{1}{2} \log_2 r$ 、(3) では公比 $r^{1/4}$ が n によらないことを明記する。

【第 2 問】

箱の中に 1 から N までの数が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし、 N を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し、そのカードに書かれた数を読み取り、そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目、2 回目、3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を、それぞれ a_1, a_2, a_3, a_4 とする。また、座標平面上に 4 点 $P_1(a_1, 0), P_2(a_1, a_2), P_3(a_1 - a_3, a_2), P_4(a_1 - a_3, a_2 - a_4)$ を定める。次の問いに答えよ。

(1) P_4 が原点 $O(0, 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ。

(2) P_4 が連立不等式 $x \geq 0, y \leq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ。

(3) P_4 が直線 $y = x$ 上にある確率を N を用いて表せ。

(4) $N = 2^m$ とする。ただし、 m を自然数とする。 P_4 が原点 O に一致し、かつ、四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

$P_4 = (a_1 - a_3, a_2 - a_4)$ であることを使う。(1)(2) は二つの独立な大小条件に分ける。(3) は差 $a_1 - a_3$ の値ごとに個数を足す。(4) は原点一致の条件下で面積 $a_1 a_2$ を数える。

【解答】

(1) $P_4 = (a_1 - a_3, a_2 - a_4)$ である。 $P_4 = O$ となるのは

$$a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4$$

のときである。 (a_1, a_2, a_3, a_4) は全部で N^4 通り、この条件を満たすものは N^2 通りだから、求める確率は

$$\frac{1}{N^2}$$

である。

(2) 条件は

$$a_1 - a_3 \geq 0, \quad a_2 - a_4 \leq 0$$

すなわち $a_1 \geq a_3, a_2 \leq a_4$ である。一組 (u, v) について $u \geq v$ となる個数は $\frac{N(N+1)}{2}$ 通りであるから、求める確率は

$$\left(\frac{N+1}{2N}\right)^2 = \frac{(N+1)^2}{4N^2}$$

である。

(3) 直線 $y = x$ 上にある条件は

$$a_2 - a_4 = a_1 - a_3$$

である。差が d である組 (a_1, a_3) の個数は、 $-N+1 \leq d \leq N-1$ に対して $N - |d|$ 通りである。したがって条件を満たす総数は

$$N^2 + 2(1^2 + 2^2 + \cdots + (N-1)^2) = \frac{N(2N^2 + 1)}{3}$$

である。よって確率は

$$\frac{2N^2 + 1}{3N^3}$$

である。

(4) $N = 2^m$ とする。 $P_4 = O$ のとき $a_1 = a_3, a_2 = a_4$ であり、四角形 $P_1 P_2 P_3 P_4$ は辺の長さが a_1, a_2 の長方形である。よって面積は $a_1 a_2$ である。

$a_1 a_2 = 2^m$ を満たす (a_1, a_2) は

$$(1, 2^m), (2, 2^{m-1}), \dots, (2^m, 1)$$

の $m+1$ 通りである。したがって求める確率は

$$\frac{m+1}{N^4} = \frac{m+1}{2^{4m}}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

独立な差 $X = a_1 - a_3$ 、 $Y = a_2 - a_4$ の確率分布を先に作る。差 0、非負、2 つの差が等しい、という各条件を同じ三角形分布から読み取る。

【解答】

$X = a_1 - a_3$ 、 $Y = a_2 - a_4$ とおく。 X, Y は独立で、 $-N + 1 \leq d \leq N - 1$ に対して

$$\Pr(X = d) = \Pr(Y = d) = \frac{N - |d|}{N^2}. \quad (1)$$

(1) $P_4 = O$ は $X = Y = 0$ と同値である。独立性と (1) より

$$\Pr(X = 0, Y = 0) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2}.$$

(2) 差の分布は 0 について対称だから

$$\Pr(X \geq 0) = \frac{1 + \Pr(X = 0)}{2} = \frac{N + 1}{2N}.$$

同様に $\Pr(Y \leq 0) = (N + 1)/(2N)$ であり、独立性から

$$\Pr(X \geq 0, Y \leq 0) = \frac{(N + 1)^2}{4N^2}.$$

(3) P_4 が $y = x$ 上にある条件は $X = Y$ である。(1) より

$$\Pr(X = Y) = \sum_{d=-N+1}^{N-1} \left(\frac{N - |d|}{N^2}\right)^2 = \frac{N^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} k^2}{N^4}.$$

平方和を計算して

$$\Pr(X = Y) = \frac{2N^2 + 1}{3N^3}.$$

(4) 原点一致のとき $a_1 = a_3$ 、 $a_2 = a_4$ で、四角形は縦 a_2 、横 a_1 の長方形になる。 $a_1 a_2 = 2^m$ なら両方とも 2 の冪でなければならない

$$(a_1, a_2) = (2^j, 2^{m-j}) \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

の $m + 1$ 通りである。全 $N^4 = 2^{4m}$ 通りから

$$\frac{m + 1}{2^{4m}}.$$

【総評】 難度 5，計算量 5。想定時間は 15 分程度。終点 P_4 は独立な 2 つの差 X, Y で決まり、その分布は $N - |d|$ 型である。(2) は 0 を含む大小確率なので単純な $1/2$ ではない。(3) は同じ差をとる確率の平方和、(4) は積が 2 の冪なら各因子も 2 の冪という整数条件が核心になる。

【第 3 問】

関数 $f(x)$ は実数全体で連続で、すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$$

を満たすとする。ただし、 e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また、 $f'(x) = 2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ は、 $0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつことを示せ。

(4) (3) のただ一つの解を α とする。曲線 $y = f(x) (0 \leq x \leq \alpha)$, x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし、曲線 $y = f(x) (\alpha \leq x \leq \pi)$, x 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

▶ 解法 1

【方針】

積分部分を補助関数とおき、微分して $f'(x)$ を求める。初期値から f を決定し、増減と符号で零点の一意性を示す。最後に、両面積の差を曲線の符号付き面積として評価する。

【解答】

(1) 与式に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 1$$

である。ここで

$$g(x) = (1-x)\cos x + x\sin x, \quad I(x) = \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$$

とおくと、 $f(x) = g(x) - I(x)$ である。また

$$I'(x) = I(x) + f(x) = g(x)$$

だから

$$f'(x) = g'(x) - I'(x) = g'(x) - g(x)$$

である。 $g'(x) = (x-1)\cos x + x\sin x$ より

$$f'(x) = 2(x-1)\cos x$$

である。

(2) (1) より

$$f(x) = 1 + \int_0^x 2(t-1)\cos t dt = 2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1$$

である。

(3) $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -3 < 0$ である。また $f'(x) = 2(x-1)\cos x$ だから、 $0 < x < 1$ で減少、 $1 < x < \frac{\pi}{2}$ で増加、 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ で減少する。

さらに $1 < \frac{\pi}{3}$ なので $\cos 1 > \frac{1}{2}$ であり、 $f(1) = 2\cos 1 - 1 > 0$ である。また $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 3 > 0$ である。したがって $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ では $f(x) > 0$ で、 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ では f は単調に減少し、端で符号が変わる。よって方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ にただ一つの解をもつ。

(4) (3) の解を α とすると、 $0 \leq x < \alpha$ で $f(x) > 0$, $\alpha < x \leq \pi$ で $f(x) < 0$ である。したがって

$$S_1 - S_2 = \int_0^\pi f(x) dx$$

である。ここで

$$\int_0^\pi f(x) dx = [2\{-(x-1)\cos x + \sin x\} + 2\sin x - x]_0^\pi = \pi - 4$$

である。 $\pi < 4$ より $S_1 - S_2 < 0$ であるから

$$S_1 < S_2$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

積分核 e^{x-t} を消すために与式全体へ e^{-x} を掛ける。積分方程式を微分可能な形へ直した後、増減と符号付き面積をグラフで確認する。

【解答】

$g(x) = (1-x)\cos x + x\sin x$ 、 $F(x) = e^{-x}f(x)$ 、 $G(x) = e^{-x}g(x)$ とおく。

(1) $x = 0$ を代入して $f(0) = 1$ である。また与式へ e^{-x} を掛けると

$$F(x) = G(x) - \int_0^x F(t) dt.$$

右辺は微分可能なので F 、したがって f も微分可能であり

$$F'(x) = G'(x) - F(x).$$

$F' = e^{-x}(f' - f)$ 、 $G' = e^{-x}(g' - g)$ を代入すると $f' = g' - g$ 。計算して

$$f'(x) = 2(x-1)\cos x.$$

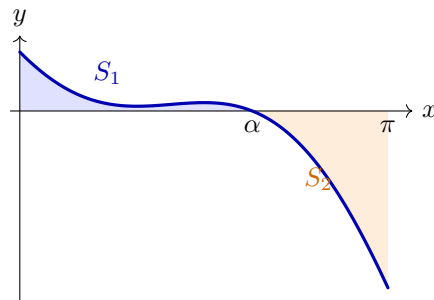
(2) 初期値から積分して

$$f(x) = 1 + \int_0^x 2(t-1)\cos t dt = 2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1.$$

(3) $f'(x) = 2(x-1)\cos x$ の符号より、 f は $(0, 1)$ で減少、 $(1, \pi/2)$ で増加、 $(\pi/2, \pi)$ で減少する。

$$f(1) = 2\cos 1 - 1 > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 3 > 0, \quad f(\pi) = -3 < 0.$$

よって前半では正のままで、最後の減少区間にだけ零点が 1 つある。これを α とする。



(4) 図の符号から

$$S_1 - S_2 = \int_0^\pi f(x) dx.$$

ここで

$$\int_0^\pi f(x) dx = \pi - 4 < 0$$

であるから $S_1 < S_2$ である。

【総評】 難度 7，計算量 6。想定時間は 22 分程度。積分核に自然指数があるときは、積分全体に指数因子を掛けてから微分すると構造を整理しやすい。零点の一意性は導関数の符号だけでなく、各端点の値と組み合わせる。面積比較では、両面積の差を曲線の符号付き面積として評価すると簡潔である。

【第 4 問】

原点を O とする座標平面上において、点 $A(0, 3), B(0, -1)$ および x 軸上の正の部分動く点 $P(t, 0)$ があり、 $\angle APB$ は鈍角でないとする。 $\triangle ABP$ の垂心を H 、頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D 、頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。その交点のことを、三角形の垂心という。

(1) $\angle APB$ が直角となる t の値を求めよ。

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ。以下では、 t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3) 点 H が $\triangle ODE$ の内心であることを証明せよ。ただし、1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。

(4) $\triangle ODE$ の内接円の半径を t を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

直角条件は $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ で求める。 H, D, E を座標で表し、 H から OD, OE, DE への距離が等しいことを示して内心であることを証明する。半径はその共通距離として求める。

【解答】

(1) $\overrightarrow{PA} = (-t, 3), \overrightarrow{PB} = (-t, -1)$ である。 $\angle APB$ が直角である条件は

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = t^2 - 3 = 0$$

であるから、 $t > 0$ より

$$t = \sqrt{3}$$

である。

(2) AB は y 軸上にあるので、点 P から AB に下ろす垂線は x 軸である。また、 BP の傾きは $1/t$ だから、 A を通り BP に垂直な直線は

$$y = 3 - tx$$

である。これと x 軸との交点が垂心 H であるから

$$H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$$

である。

(3) $t > \sqrt{3}$ とする。計算すると

$$D\left(\frac{4t}{t^2+1}, \frac{3-t^2}{t^2+1}\right), \quad E\left(\frac{12t}{t^2+9}, \frac{3(t^2-3)}{t^2+9}\right)$$

である。 $H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$ から直線 OD までの距離は

$$\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2+1)(t^2+9)}}$$

である。同様に、直線 OE までの距離も同じ値になる。

また、直線 DE の傾きは $\frac{t^2+3}{2t}$ であるから、 H から直線 DE までの距離も

$$\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2+1)(t^2+9)}}$$

である。 $t > \sqrt{3}$ のとき D は x 軸の下側、 E は上側にあり、 H は $\triangle ODE$ の内部にある。したがって、 H は $\triangle ODE$ の三辺から等距離にある内部の点であり、 $\triangle ODE$ の内心である。

(4) (3) で求めた共通距離が内接円の半径である。よって半径は

$$\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2+1)(t^2+9)}}$$

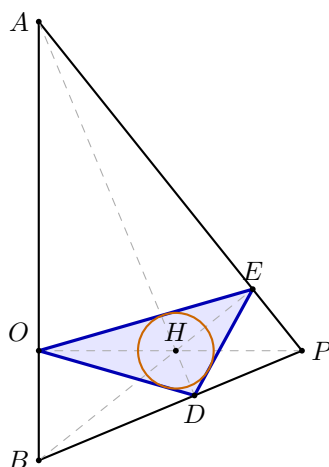
である。

▶ 解法 2

【方針】

垂足を求めた後、三角形 ODE の 3 辺の方程式を対称な形で書く。 H から各辺への距離が同じ式になることを、図と直線方程式から一括して示す。

【解答】



(1)

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-t, 3) \cdot (-t, -1) = t^2 - 3.$$

したがって直角となるのは $t = \sqrt{3}$ である。

(2) BP の傾きは $1/t$ なので、 A からの高さは $y = 3 - tx$ である。 P から AB への高さ $y = 0$ との交点より

$$H\left(\frac{3}{t}, 0\right).$$

(3) 垂足を計算すると

$$D\left(\frac{4t}{t^2+1}, \frac{3-t^2}{t^2+1}\right), \quad E\left(\frac{12t}{t^2+9}, \frac{3(t^2-3)}{t^2+9}\right).$$

これらから三辺の方程式は

$$\begin{aligned} OD : (t^2 - 3)x + 4ty &= 0, & OE : (t^2 - 3)x - 4ty &= 0, \\ DE : (t^2 + 3)x - 2ty - 6t &= 0. \end{aligned}$$

$H = (3/t, 0)$ から各直線までの距離を代入すると、3 本とも

$$\frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{t^4 + 10t^2 + 9}} = \frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}}. \quad (1)$$

$t > \sqrt{3}$ では D は x 軸の下、 E は上にあり、 $0 < 3/t < t$ だから H は三角形 ODE の内部にある。よって 3 辺から等距離にある H は内心である。

(4) 内接円の半径は (1) の共通距離なので

$$\frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}}.$$

【総評】 難度 7, 計算量 7. 想定時間は 25 分程度。 OD と OE の方程式が x 軸について対称になり、 H がその軸上にあることが内心の見通しを与える。ただし三辺からの等距離だけでは傍心の可能性が残るため、 $t > \sqrt{3}$ のもとで H が三角形内部にあることまで確認する。

【第 4 問】

i を虚数単位とし、複素数 z に対して、 $w = z^2 + 2z + 1 - 2i$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(2) $w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し、それぞれを $a + bi$ (a, b は実数) の形に書き表せ。

(3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を α 、実部の小さい方を β とし、対応する複素数平面上の点をそれぞれ A, B とする。また、線分 AB の中点を M とする。複素数 z に対応する複素数平面上の点が、線分 AM 上（両端を含む）を動くとき、複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が、点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき、複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

$z = x + yi$ として w の実部・虚部を計算する。平方根は $z + 1 = u + vi$ と置いて実部虚部比較で求める。線分や直線上の点は実パラメータで表し、 w の軌跡を座標で読む。

【解答】

(1) $z = x + yi$ とおくと

$$w = (x + 1 + yi)^2 - 2i$$

であるから、 w の実部は $(x + 1)^2 - y^2$ である。よって実部が 0 となる点は

$$y = x + 1 \quad \text{または} \quad y = -x - 1$$

を満たす。したがって、求める図形はこの二直線である。

(2) $w = 0$ は $(z + 1)^2 = 2i$ と同値である。 $z + 1 = u + vi$ とおくと

$$u^2 - v^2 = 0, \quad 2uv = 2$$

である。 $u^2 = v^2$ より $u = v$ または $u = -v$ であるが、 $uv = 1$ より $u = -v$ は不可能である。したがって $u = v$ 、 $u^2 = 1$ であり、

$$z = i, \quad z = -2 - i$$

を得る。よって解は 2 個である。

(3) 実部の大きい方は $\alpha = i$ 、小さい方は $\beta = -2 - i$ である。線分 AB の中点は M に対応する複素数 -1 である。点が線分 AM 上を動くとき、実数 s を用いて

$$z = i + s(-1 - i) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

と表せる。このとき

$$z + 1 = (1 - s)(1 + i)$$

であるから

$$w = 2\{(1 - s)^2 - 1\}i$$

である。よって w は虚軸上を動き、実部は 0、虚部は 0 から -2 までの値をとる。すなわち、0 と $-2i$ を結ぶ線分である。

(4) 点 A を通り線分 AB に垂直な直線は、実数 s を用いて

$$z = i + s(1 - i)$$

と表せる。このとき

$$z + 1 = (1 + s) + (1 - s)i$$

であるから

$$w = 4s - 2s^2i$$

である。 $w = X + Yi$ と書くと $X = 4s$ 、 $Y = -2s^2$ なので

$$Y = -\frac{X^2}{8}$$

である。したがって、求める図形は原点を頂点とし、虚部が負の向きに開く放物線である。

▶ 解法 2

【方針】

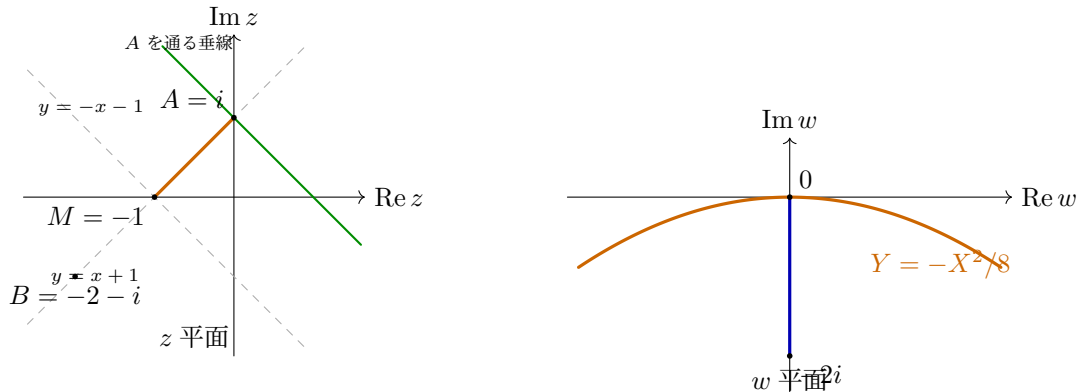
平行移動 $u = z + 1$ により写像を $w = u^2 - 2i$ と単純化する。 u 平面上の直線・線分を実数パラメータで表し、平方後の実部・虚部から軌跡を読む。

【解答】

$u = z + 1$ とおくと

$$w = u^2 - 2i. \quad (1)$$

この平行移動と各軌跡をまとめると次図のようになる。



(1) $u = X + Yi$ とすると $\operatorname{Re}(u^2) = X^2 - Y^2$ である。(1) より w の実部が 0 となる条件は

$$X^2 - Y^2 = 0 \iff Y = \pm X.$$

$X = x + 1, Y = y$ へ戻して、 z 平面上の 2 直線

$$y = x + 1, \quad y = -x - 1$$

を得る。

(2) $w = 0$ は $u^2 = 2i = (1+i)^2$ だから

$$u = \pm(1+i).$$

$z = u - 1$ より、異なる 2 解は $z = i, -2-i$ である。

(3) A から M まででは

$$u = (1-s)(1+i) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

よって

$$w = 2\{(1-s)^2 - 1\}i.$$

虚部は 0 から -2 まで連続に動くので、軌跡は 0 と $-2i$ を結ぶ線分である。

(4) AB の方向は $1+i$ なので、これに垂直な方向は $1-i$ である。したがって

$$u = (1+i) + s(1-i) = (1+s) + (1-s)i \quad (s \in \mathbb{R}).$$

(1) へ代入して

$$w = 4s - 2s^2i.$$

$w = X + Yi$ と書けば $X = 4s, Y = -2s^2$ だから

$$Y = -\frac{X^2}{8}.$$

よって軌跡は原点を頂点として虚軸の負方向へ開く放物線である。

【総評】 難度 6, 計算量 5. 想定時間は 18 分程度。平行移動 $u = z + 1$ で平方写像の中心を原点へ移すと、2 直線・2 つの零点・線分・垂線が一つの図でつながる。軌跡問題ではパラメータの範囲が重要で、(3) は放物線ではなく端点を含む線分、(4) は $s \in \mathbb{R}$ なので放物線全体になる。

【第 5 問】

原点を O とする座標平面上において、点 $A(0, 3), B(0, -1)$ および x 軸上の正の部分動く点 $P(t, 0)$ があり、 $\angle APB$ は鈍角でないとする。 $\triangle ABP$ の垂心を H 、頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D 、頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。その交点のことを、三角形の垂心という。

(1) $\angle APB$ が直角となる t の値を求めよ。

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ。以下では、 t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3) 点 H が $\triangle ODE$ の内心であることを証明せよ。ただし、1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。

(4) $\triangle ODE$ の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

(5) (4) で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし、最大値を与える t の値を求める必要はない。

▶ 解法 1

【方針】

(1) から (4) までは垂心・垂足を座標で求め、三辺への距離の一致から内心と内接円半径を出す。(5) は $f(t)^2$ を調べ、 $t \rightarrow \sqrt{3} + 0$ と $t \rightarrow \infty$ で 0 に近づくことから、正の値をとる閉区間上で最大値をもつことを示す。

【解答】

(1) $\overrightarrow{PA} = (-t, 3)$, $\overrightarrow{PB} = (-t, -1)$ である。直角条件は

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = t^2 - 3 = 0$$

であるから、 $t > 0$ より $t = \sqrt{3}$ である。

(2) AB は y 軸上にあるので、 P から AB に下ろす垂線は x 軸である。また BP の傾きは $1/t$ だから、 A を通り BP に垂直な直線は $y = 3 - tx$ である。よって垂心は

$$H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$$

である。

(3) $t > \sqrt{3}$ とする。垂足は

$$D\left(\frac{4t}{t^2+1}, \frac{3-t^2}{t^2+1}\right), \quad E\left(\frac{12t}{t^2+9}, \frac{3(t^2-3)}{t^2+9}\right)$$

である。点 $H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$ から直線 OD 、直線 OE 、直線 DE までの距離はいずれも

$$\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2+1)(t^2+9)}}$$

となる。また $t > \sqrt{3}$ のとき D は x 軸の下側、 E は上側にあり、 H は $\triangle ODE$ の内部にある。したがって H は三辺から等距離にある内部の点であり、 $\triangle ODE$ の内心である。

(4) 内接円の半径を $f(t)$ とすると、(3) の共通距離より

$$f(t) = \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2+1)(t^2+9)}} \quad (t > \sqrt{3})$$

である。

(5) $t > \sqrt{3}$ で $f(t) > 0$ である。また

$$f(t)^2 = \frac{9(t^2-3)^2}{t^2(t^2+1)(t^2+9)}$$

であるから、 t が $\sqrt{3}$ に右から近づくと $f(t)$ は 0 に近づき、 t が限りなく大きくなるときも $f(t)$ は 0 に近づく。

一方、例えば $t = 3$ では $f(3) > 0$ である。したがって、 $\sqrt{3}$ に十分近い範囲と、十分大きい範囲では $f(t) < f(3)$ とできる。残った閉区間上で $f(t)$ は連続であるから最大値をとる。よって $f(t)$ は $t > \sqrt{3}$ において最大値をもつ。

▶ 解法 2

【方針】

(1) から (4) までは三辺の方程式をそろえ、内心条件を「内部にあり、三辺から等距離」として確認する。(5) では $u = t^2$ とおき、 $F(u) = f(t)^2$ の対数微分の符号を 3 次式の増減へ帰着させる。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-t, 3) \cdot (-t, -1) = t^2 - 3.$$

よって、 $\angle APB$ が直角となるのは $t = \sqrt{3}$ である。

(2) BP の傾きは $1/t$ なので、 A からの高さは $y = 3 - tx$ である。 P から AB への高さ $y = 0$ との交点より

$$H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$$

を得る。

(3) 垂足を計算すると

$$D\left(\frac{4t}{t^2+1}, \frac{3-t^2}{t^2+1}\right), \quad E\left(\frac{12t}{t^2+9}, \frac{3(t^2-3)}{t^2+9}\right).$$

したがって、三辺の方程式は

$$OD : (t^2 - 3)x + 4ty = 0, \quad OE : (t^2 - 3)x - 4ty = 0,$$

$$DE : (t^2 + 3)x - 2ty - 6t = 0.$$

$H = (3/t, 0)$ からこれら 3 直線までの距離は、いずれも

$$\frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}}. \quad (1)$$

また、 $t > \sqrt{3}$ では D は x 軸の下側、 E は上側にあり、 $0 < 3/t < t$ であるから H は $\triangle ODE$ の内部にある。ゆえに H は三辺から等距離にある内部の点、すなわち内心である。

(4) (1) の共通距離が内接円の半径であるから

$$f(t) = \frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}} \quad (t > \sqrt{3}).$$

(5) $u = t^2$ とおき、

$$F(u) = f(t)^2 = \frac{9(u - 3)^2}{u(u + 1)(u + 9)} \quad (u > 3)$$

とする。 $F(u) > 0$ なので、対数微分により

$$\frac{F'(u)}{F(u)} = \frac{2}{u - 3} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} - \frac{1}{u + 9} = -\frac{h(u)}{u(u - 3)(u + 1)(u + 9)}, \quad (2)$$

ただし $h(u) = u^3 - 9u^2 - 69u - 27$ であり、 $h'(u) = 3(u^2 - 6u - 23)$ である。したがって、 $u > 3$ では h は $3 + 4\sqrt{2}$ まで減少し、その後は単調に増加する。さらに $h(3) = -288 < 0$ で、 u が限りなく大きくなると $h(u)$ も限りなく大きくなるから、 $h(u) = 0$ は $u > 3$ にただ 1 つの解 u_0 をもつ。

(2) の分母は正であるから、 $F'(u)$ は $3 < u < u_0$ で正、 $u > u_0$ で負である。よって F 、したがって正の平方根 f は $t = \sqrt{u_0}$ で最大値をもつ。

【総評】 難度 8、計算量 8。想定時間は 30 分程度。垂心・垂足の座標だけで終わらず、三辺の方程式をそろえたと内心の証明と半径の導出を同時に整理できる。最大値の存在は、端の挙動と連続性による方法に加え、 $u = t^2$ として $f(t)^2$ の増減を調べる方法も有効である。対数微分では分母の正負を先に固定し、3 次式 $h(u)$ の零点が 1 つだけであることまで示す。