

広島大学 2020 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b を正の定数とする。 $0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し、平面上で次の三つの条件を満たす三角形 PAB と、この三角形と辺 AB を共有する長方形 $ABCD$ を考える。

- (i) $PA = a$ 、 $PB = b$ 、 $\angle APB = \theta$ である。
- (ii) 2 点 C, D はともに、直線 AB に関して点 P と反対側にある。
- (iii) $AB = 3AD$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 $ABCD$ の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) 辺 AB の長さを a, b, θ を用いて表せ。
- (2) S を a, b, θ を用いて表せ。
- (3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし、 S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。
 M を a, b を用いて表せ。また、 $\sin \beta$ および $\cos \beta$ の値を求めよ。
- (4) $a = 16$ 、 $b = 25$ とする。 $\theta = \beta$ のとき、点 P と直線 AB の距離を求めよ。

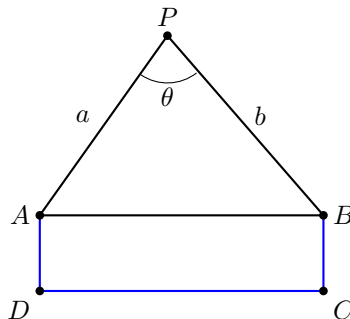
▶ 解法 1 (三角関数を合成する)

【方針】

余弦定理で AB^2 を求め、長方形の面積を $AB^2/3$ と表す。面積和を $3 \sin \theta - 4 \cos \theta$ の形へ整理して三角関数を合成し、最大時の角を決める。最後は三角形の二通りの面積表示から高さを求める。

【解答】

配置は次図のようになる。



(1)

余弦定理より

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}.$$

(2)

三角形の面積は $ab \sin \theta / 2$ である。また $AD = AB/3$ だから、長方形の面積は $AB^2/3$ である。よって

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}{3}.$$

(3)

$$S = \frac{a^2 + b^2}{3} + \frac{ab}{6}(3 \sin \theta - 4 \cos \theta).$$

ここで α を

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

を満たす第 4 象限の角とすると

$$3 \sin \theta - 4 \cos \theta = 5 \sin(\theta + \alpha).$$

$0 < \theta < \pi$ の範囲で右辺は最大値 5 をとる。したがって

$$M = \frac{a^2 + b^2}{3} + \frac{5}{6}ab = \frac{2a^2 + 5ab + 2b^2}{6}.$$

最大時には

$$\sin \beta = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{4}{5}.$$

(4)

$$AB^2 = 16^2 + 25^2 - 2 \cdot 16 \cdot 25 \left(-\frac{4}{5}\right) = 1521$$

より $AB = 39$ である。求める距離を h とすると

$$\frac{1}{2} \cdot 39h = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 25 \cdot \frac{3}{5}.$$

よって

$$h = \frac{80}{13}.$$

▶ 解法 2 (内積の不等式で最大値を得る)

【方針】

面積表示までは余弦定理で求める。最大値については、単位ベクトル $(\sin \theta, \cos \theta)$ とベクトル $(3, -4)$ の内積をコーシー・シュワルツの不等式で評価し、等号条件から β を決める。

【解答】

(1)

余弦定理より

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}.$$

(2)

また $AD = AB/3$ であるから、三角形と長方形の面積を足して

$$S = \frac{a^2 + b^2}{3} + \frac{ab}{6}(3 \sin \theta - 4 \cos \theta).$$

(3)

コーシー・シュワルツの不等式より

$$3 \sin \theta - 4 \cos \theta \leq \sqrt{3^2 + (-4)^2} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 5.$$

等号は

$$(\sin \theta, \cos \theta) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

のときに成り立つ。この組は $0 < \theta < \pi$ を満たすので、

$$M = \frac{2a^2 + 5ab + 2b^2}{6}, \quad \sin \beta = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{4}{5}.$$

(4)

$a = 16, b = 25$ のとき

$$AB = 39, \quad [\triangle PAB] = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 25 \cdot \frac{3}{5} = 120.$$

したがって、点 P から直線 AB までの距離は

$$\frac{2[\triangle PAB]}{AB} = \frac{240}{39} = \frac{80}{13}.$$

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。図形条件を面積和へ翻訳すると、変数部分は $3 \sin \theta - 4 \cos \theta$ だけになる。三角関数の合成と内積の評価は同じ最大化を別の言葉で行っており、等号条件から $\sin \beta$ と $\cos \beta$ の符号まで確定することが要点である。

【第 2 問】

i を虚数単位とする。 $z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し、

$$w = \frac{z-i}{z+1}$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ。また、 $w \neq 1$ のとき、 z を w を用いて表せ。
- (2) t を -1 と異なる実数とする。複素数平面において、実部が t である複素数全体の描く直線を l_t とおく。点 z が直線 l_t 上を動くとき、点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く。この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ。
- (3) P_t を (2) で定義した点とする。 t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を、複素数平面上に図示せよ。

▶ 解法 1 (実部・虚部に分けて円の中心を読む)

【方針】

(1) で一次分数式を逆に解く。(2) では $w = u + vi$ とおき、 $z = (w+i)/(1-w)$ の実部が t である条件を円の方程式へ整理する。(3) は中心座標から t を消去し、除外点も確認する。

【解答】

(1)

もし $w = 1$ ならば

$$\frac{z-i}{z+1} = 1$$

より $-i = 1$ となり矛盾する。よって $w \neq 1$ である。また

$$w(z+1) = z-i$$

を z について解くと

$$z = \frac{w+i}{1-w}.$$

(2)

$w = u + vi$ とおく。分母を実数化すると、 z の実部は

$$\frac{u(1-u) - v(v+1)}{(1-u)^2 + v^2}$$

である。これが t に等しいから

$$(t+1)(u^2 + v^2) - (2t+1)u + v + t = 0.$$

$t \neq -1$ なので円を表し、その中心は

$$\left(\frac{2t+1}{2(t+1)}, -\frac{1}{2(t+1)} \right).$$

したがって P_t に対応する複素数は

$$\frac{2t+1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t+1)}i.$$

(3)

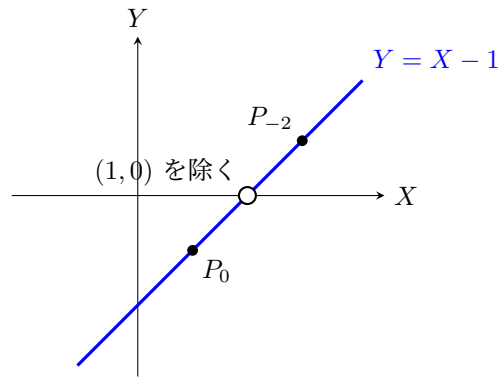
中心の座標を (X, Y) とすると

$$X = 1 - \frac{1}{2(t+1)}, \quad Y = -\frac{1}{2(t+1)}.$$

よって

$$Y = X - 1.$$

また $t \neq -1$ より $Y \neq 0$ である。したがって軌跡は直線 $Y = X - 1$ から点 $(1, 0)$ を除いたものである。



▶ 解法 2（複素共役で円の方程式を作る）

【方針】

直線 l_t を $z + \bar{z} = 2t$ と表し、逆変換した $z, \bar{z}$ を代入する。得られた式を $w = u + vi$ で標準形に直して中心を読み、最後は中心の実部と虚部の差をとって軌跡を決める。

【解答】

(1)

$w = 1$ を仮定すると $z - i = z + 1$ となって矛盾する。また式を交差に掛けて整理すれば

$$z = \frac{w + i}{1 - w}.$$

(2)

z の実部が t であることは

$$z + \bar{z} = 2t$$

と同値である。(1) から

$$z = \frac{w + i}{1 - w}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{w} - i}{1 - \bar{w}}.$$

これらを代入し、 $w = u + vi$ において整理すると

$$(t + 1)(u^2 + v^2) - (2t + 1)u + v + t = 0.$$

平方完成すれば

$$\left(u - \frac{2t + 1}{2(t + 1)}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2(t + 1)}\right)^2 = \frac{1}{2(t + 1)^2}.$$

よって中心に対応する複素数は

$$\frac{2t + 1}{2(t + 1)} - \frac{1}{2(t + 1)}i.$$

なお逆変換の条件 $w \neq 1$ により、円から点 1 が除かれる。

(3)

中心を $X + Yi$ とすると

$$X - Y = 1, \quad Y \neq 0.$$

したがって P_t の軌跡は

$$Y = X - 1$$

から $(1, 0)$ を除いた直線である。

【総評】 難度 6、目安時間 20 分。一次分数変換を逆に解いた後、縦線という条件を円の方程式へ移す問題である。実部・虚部で直接計算する方法と、複素共役を使う方法は同じ円へ到達する。中心の軌跡だけでなく、 $t = -1$ に対応して到達しない点 $(1, 0)$ を白丸で除くことまで必要である。

【第 3 問】

関数

$$f(x) = xe^{-2x^2}$$

について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。また、それぞれをとるときの x の値を求めよ。
- (2) $a > 0$ とし、点 $A(a, 0)$ を考える。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を l_t とおく。 l_t が点 A を通るような実数 t がちょうど 2 つあるとする。このとき、 a の値を求めよ。さらに、その 2 つの t の値を p, q (ただし $p < q$) とおくと、 p, q を求めよ。
- (3) q を (2) で定めた値とする。曲線 $y = f(x)$ 、直線 $x = q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (接線条件を関数の増減で調べる)

【方針】

(1) は導関数の符号を調べる。(2) は接線が $(a, 0)$ を通る条件を $a = h(t)$ の形へ直し、2 つの定義域の枝で交点数を数える。正の枝の最小値が水平線と接するときに解が 2 個となる。(3) は得られた q まで直接積分する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2}.$$

指数関数の部分は常に正だから、 $f'(x)$ の符号は $1 - 4x^2$ で決まる。よって

$$x = -\frac{1}{2}$$

で極小値

$$-\frac{1}{2}e^{-1/2}$$

をとり、

$$x = \frac{1}{2}$$

で極大値

$$\frac{1}{2}e^{-1/2}$$

をとる。

(2)

接線が $(a, 0)$ を通る条件は

$$-f(t) = f'(t)(a - t).$$

整理すると

$$a = \frac{4t^3}{4t^2 - 1} =: h(t).$$

ここで

$$h'(t) = \frac{4t^2(4t^2 - 3)}{(4t^2 - 1)^2}.$$

$a > 0$ となるのは $-1/2 < t < 0$ と $t > 1/2$ である。前者では $h(t)$ は $+\infty$ から 0 まで単調に減少するため、どの $a > 0$ に対しても解が 1 つある。後者では

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

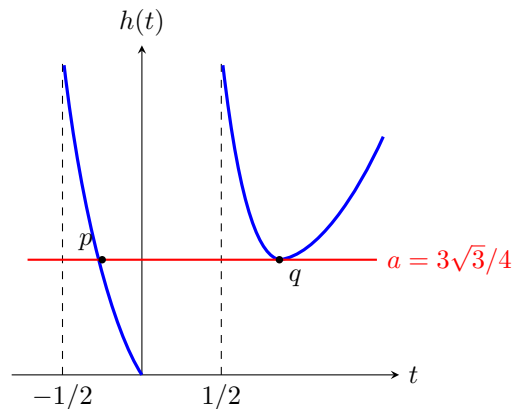
で最小値

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる。したがって全体の解がちょうど 2 個になるのは、正の枝で水平線が接するとき、すなわち

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。関係は次の模式図で確認できる。



この a を代入して因数分解すると

$$4\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(t + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0.$$

よって

$$p = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3)

$0 \leq x \leq q$ では $f(x) \geq 0$ だから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^q x e^{-2x^2} dx &= \left[-\frac{1}{4} e^{-2x^2} \right]_0^q \\ &= \frac{1}{4} (1 - e^{-3/2}). \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (三次式と導関数の共通根を使う)

【方針】

接線条件を t の三次方程式へ移す。実数解がちょうど 2 個なら三次式は重解をもち、その重解は導関数との共通根である。共通根を代入して a を決め、因数分解によって 2 つの接点を確定する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2}$$

より、極小は

$$x = -\frac{1}{2}, \quad f(x) = -\frac{1}{2}e^{-1/2},$$

極大は

$$x = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-1/2}$$

である。

(2)

接線が $A(a, 0)$ を通る条件を整理し、

$$F(t) = 4t^3 - 4at^2 + a = 0$$

とおく。実数解がちょうど 2 つなら、三次式 $F(t)$ は重解をもつ。その重解は

$$F'(t) = 4t(3t - 2a) = 0$$

も満たす。 $t = 0$ では $F(0) = a > 0$ だから、重解は

$$t = \frac{2a}{3}$$

である。これを $F(t) = 0$ に代入すると

$$F\left(\frac{2a}{3}\right) = a\left(1 - \frac{16a^2}{27}\right) = 0.$$

$a > 0$ より

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

このとき

$$F(t) = 4\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(t + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

となり、実際に異なる実数解は 2 つである。したがって

$$p = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}/2} x e^{-2x^2} dx &= \left[-\frac{1}{4} e^{-2x^2} \right]_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{4} (1 - e^{-3/2}). \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、目安時間 25 分。接線の本数を、 $a = h(t)$ のグラフと三次式・導関数の共通根という二方向から確認できる。『ちょうど 2 つ』は正の枝の最小点が重解になる境界値を意味し、負の枝の単根も同時に数える必要がある。面積の積分自体は短い、上端 $q = \sqrt{3}/2$ の代入を正確に行う。

【第 4 問】

n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \, dx$$

の値を求めよ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} |\sin nx| \, dx$$

の値を求めよ。

(3) 座標平面において連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad y \leq |\sin nx|$$

の表す図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(4) 座標平面において連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x} |\sin nx|$$

の表す図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (1 周期へ縮約して積分する)

【方針】

(1)(2) は $u = nx$ と置き、 $|\sin u|$ の周期を使う。(3) は回転半径が $1/2$ と $|\sin nx|$ の小さい方であることに注意し、1 周期内で交点 $\pi/6, 5\pi/6$ に分ける。(4) は半径の二乗を積分し、倍角公式を用いる。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \, dx &= \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

(2)

$u = nx$ とおくと

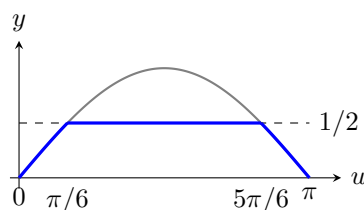
$$\int_0^{\pi} |\sin nx| \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\sin u| \, du.$$

$|\sin u|$ は周期 π で、1 周期の積分は 2 だから

$$\int_0^{\pi} |\sin nx| \, dx = 2.$$

(3)

1 周期で見ると、回転半径は次図の青線、すなわち $1/2$ と $\sin u$ の小さい方である。



周期性により、体積は

$$V = \pi \int_0^{\pi} \min\left(\frac{1}{4}, \sin^2 u\right) du.$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= 2 \int_0^{\pi/6} \sin^2 u \, du + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

よって

$$V = \pi \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

(4)

回転半径の二乗は $x \sin^2 nx$ だから

$$W = \pi \int_0^{\pi} x \sin^2 nx \, dx.$$

倍角公式より

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos 2nx \, dx.$$

部分積分により後者は 0 となるので

$$W = \pi \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^3}{4}.$$

▶ 解法 2 (周期性と区間の対称性を徹底して使う)

【方針】

(1)(2) は半波ごとの面積を数える。(3) は各半波が左右対称であることから端の積分を 2 倍する。(4) は $F(x) = \sin^2 nx$ が $F(\pi - x) = F(x)$ を満たすことを使い、 x の一次因子を平均値 $\pi/2$ に置き換える。

【解答】

(1)

区間 $[0, \pi/n]$ は $\sin nx$ の正の半波 1 個分であるから

$$\int_0^{\pi/n} \sin nx \, dx = \frac{2}{n}.$$

(2)

$[0, \pi]$ には $|\sin nx|$ の同じ半波が n 個あり、各面積は $2/n$ である。よって

$$\int_0^\pi |\sin nx| \, dx = n \cdot \frac{2}{n} = 2.$$

(3)

各半波で $|\sin nx| = 1/2$ となる点は、端から長さ $\pi/(6n)$ の位置にある。全 n 半波は合同だから

$$\begin{aligned} V &= 2n\pi \left\{ \int_0^{\pi/(6n)} \sin^2 nx \, dx + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{6n} \right) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

(4)

$$I = \int_0^\pi x \sin^2 nx \, dx$$

とおく。 x を $\pi - x$ に置き換えると、 n が整数であることから

$$I = \int_0^\pi (\pi - x) \sin^2 nx \, dx.$$

両式を加えて

$$2I = \pi \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2}.$$

よって $I = \pi^2/4$ であり、体積は

$$W = \pi I = \frac{\pi^3}{4}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 20 分。すべての小問で周期性が中心になる。(3) では半径ではなく半径の二乗を積分し、上限 $1/2$ によって中央部が平らに切られる。(4) は部分積分でも求まるが、 x と $\pi - x$ を組にする対称性を使うと計算が大幅に短くなる。定積分はすべて独立行に組んだ。

【第 5 問】

1 個のさいころを 3 回投げ、1 回目に出た目を a_1 、2 回目に出た目を a_2 、3 回目に出た目を a_3 とする。次に、1 枚の硬貨を 3 回投げる。 $k = 1, 2, 3$ に対し、 k 回目に表が出た場合は $b_k = 1$ 、裏が出た場合は $b_k = 0$ とおく。ベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である確率を求めよ。
- (2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ。
- (3) $\vec{b} = (1, 1, 1)$ であったとき、 $\vec{a} = (1, 1, 5)$ である条件付き確率を求めよ。
- (4) $\vec{b} = (1, 1, 1)$ であったとき、 $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1 (1 の個数で重み付き分類をする)

【方針】

条件 $\vec{b} = (1, 1, 1)$ の確率を先に求める。分子では、和が 7 になる三つ組を成分に含まれる 1 の個数で分類する。1 の成分では硬貨の表裏が自由で、1 以外の成分では表だけが許されることを重みとして掛ける。

【解答】

(1)

正の整数解 $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ を順序も区別して型ごとに数える。

$$\{1, 1, 5\}, \quad \{1, 2, 4\}, \quad \{1, 3, 3\}, \quad \{2, 2, 3\}$$

の並べ方はそれぞれ 3, 6, 3, 3 通りで、合計 15 通りである。したがって

$$P(a_1 + a_2 + a_3 = 7) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}.$$

(2)

硬貨が表の場合、または硬貨が裏で $a_1 = 1$ の場合を足して

$$P(b_1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

(3)

3 成分は独立だから

$$P(\vec{b} = (1, 1, 1)) = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343}{1728}.$$

$\vec{a} = (1, 1, 5)$ のもとでは、3 回目の硬貨だけ表であればよい。よって

$$P(\vec{a} = (1, 1, 5), \vec{b} = (1, 1, 1)) = \frac{1}{216} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{432}.$$

したがって

$$P(\vec{a} = (1, 1, 5) \mid \vec{b} = (1, 1, 1)) = \frac{1/432}{343/1728} = \frac{4}{343}.$$

(4)

和が 7 になる三つ組を、成分に含まれる 1 の個数で分類する。

1 の個数	三つ組の個数	$\vec{b} = (1, 1, 1)$ となる硬貨の確率
2	3	$1/2$
1	9	$1/4$
0	3	$1/8$

よって

$$\begin{aligned} P(a_1 + a_2 + a_3 = 7, \vec{b} = (1, 1, 1)) \\ = \frac{1}{216} \left(3 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} \right) = \frac{33}{1728}. \end{aligned}$$

したがって条件付き確率は

$$\frac{33/1728}{343/1728} = \frac{33}{343}.$$

▶ 解法 2 (条件後の各成分の分布を使う)

【方針】

1 成分について $b_k = 1$ が観測された後のさいころの目の分布を作る。目 1 の確率は $2/7$ 、目 2 から 6 は各 $1/7$ となる。条件後も成分は独立なので、固定ベクトルと和が 7 の確率をこの分布で計算する。

【解答】

(1)

和が 7 になる順序付き三つ組は 15 通りだから

$$P(a_1 + a_2 + a_3 = 7) = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}.$$

(2)

$$P(b_1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

(3)

条件 $b_k = 1$ のもとで

$$P(a_k = 1 \mid b_k = 1) = \frac{2}{7},$$

$$P(a_k = j \mid b_k = 1) = \frac{1}{7} \quad (j = 2, 3, 4, 5, 6).$$

各成分は条件後も独立だから

$$P(\vec{a} = (1, 1, 5) \mid \vec{b} = (1, 1, 1)) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{343}.$$

(4)

和が 7 になる三つ組のうち、1 を 2 個含む 3 通りは各確率 $4/343$ 、1 を 1 個含む 9 通りは各確率 $2/343$ 、1 を含まない 3 通りは各確率 $1/343$ である。したがって

$$P(a_1 + a_2 + a_3 = 7 \mid \vec{b} = (1, 1, 1)) = \frac{3 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{343} = \frac{33}{343}.$$

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。硬貨の観測により、さいころの目 1 だけが他の目の 2 倍の事後確率をもつ。同時確率を 1 の個数で重み付き分類する方法と、条件後の分布 $(2/7, 1/7, \dots, 1/7)$ を先に作る方法で同じ結論を検算できる。文系第 3 問とは類題だが、本問は理系第 5 問として独立に扱う。