

入 学 試 験 問 題

数 学



広島大学 2021 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a を実数とする。関数

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$$

が $x = a$ で極大値をとるとき、次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) 次の不等式を解け。

$$|x+1| + |x-2| \leq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき、 $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

第 2 問

座標平面において、2つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 $A(1, 1)$ 、点 $C(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直であるとする。このとき、 B の座標を求めよ。
- (2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり、 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直であるとする。このとき、 D の座標を求めよ。
- (3) B, D はそれぞれ (1), (2) で定めたものとする。このとき、四角形 $ABCD$ が正方形であることを示せ。

第 3 問

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目, 2 回目, 3 回目に出た目をそれぞれ a, b, c とし,

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ。

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, $f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ。

(4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, 少なくとも 1 つが正の解である条件付き確率を求めよ。

第 4 問

a, b, c を実数とし，2 次方程式

$$x^2 + x - (c - 1) = 0$$

が実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。さらに，

$$a + b = c^2, \quad a\alpha + b\beta + c = 0$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) α, β および $b - a$ を，それぞれ c を用いて表せ。

以下では a, b, c を自然数とする。

(2) $\sqrt{4c - 3}$ が自然数でないとき，自然数 a, b, c の組を求めよ。

(3) 自然数 s を用いて $4c - 3 = s^2$ と表せるとき， s と a は

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

を満たすことを示せ。

(4) (3) のとき，自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。

第 5 問

座標平面において，曲線 $y = e^x$ 上の点 $P(t, e^t)$ における法線を l とし， l と y 軸との交点を Q とする。 $t \neq 0$ のときは線分 PQ の中点を R とし， $t = 0$ のときは $R(0, 1)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) t が実数全体を動くとき，点 R の描く曲線 C の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C ， y 軸，直線 $y = e^{-2} + e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。
- (4) 図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

第 6 問

座標平面において、 $O(0,0)$ 、 $A(4,0)$ 、 $P(3,0)$ とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする三角形 OAB を考える。ただし、円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。
- (2) 円 C の半径を r とするとき、 r のとる値の範囲を求めよ。
- (3) r が (2) の範囲で変化するとき、点 B の軌跡の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)