

広島大学 2021 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を実数とする。関数

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$$

が $x = a$ で極大値をとるとき、次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) 次の不等式を解け。

$$|x+1| + |x-2| \leq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき、 $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

▶ 解法 1 (増減表と候補値の比較)

【方針】

まず $f'(x)$ を因数分解し、 $x = a$ が極大点になるための根の大小を調べる。(2) で絶対値不等式から閉区間を求め、(3) では導関数の符号変化と端点値を比較して最大値・最小値を決める。

【解答】

(1)

$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a = -(x-a)(2x-1)$$

である。 $x = a$ で極大値をとるには、導関数の符号が $x = a$ の前後で正から負に変わればよい。 $f'(x)$ は上に凸でない 2 次式であり、根は a と $\frac{1}{2}$ であるから、 a が大きい方の根でなければならない。よって

$$a > \frac{1}{2}$$

である。

(2) $x < -1$ では $|x+1| + |x-2| = 1-2x$, $-1 \leq x \leq 2$ では 3 , $2 < x$ では $2x-1$ である。したがって

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

である。

(3) (1) より $a > \frac{1}{2}$ であり、 $f'(x)$ の符号は

$$- \quad (x < \frac{1}{2}), \quad + \quad (\frac{1}{2} < x < a), \quad - \quad (a < x)$$

である。また

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{30a+27}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-6a}{24}, \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{90a-175}{24}, \quad f(a) = \frac{a^2(2a-3)}{6}$$

である。 $a \leq \frac{5}{2}$ のときも $f(a) \leq \frac{25}{12} < \frac{21}{4} < f\left(-\frac{3}{2}\right)$ であり、 $a > \frac{5}{2}$ のときは区間内で $x = a$ をとらない。したがって最大値は常に左端でとり、

$$\frac{30a+27}{8}$$

である。最小値については

$$f\left(\frac{5}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16(6a-11)}{24}$$

より、

$$\begin{cases} \frac{90a-175}{24} & \left(\frac{1}{2} < a < \frac{11}{6}\right), \\ \frac{1-6a}{24} & \left(a \geq \frac{11}{6}\right) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2 (2 階微分と端点差による整理)

【方針】

(1) は停留条件を確認したうえで 2 階微分により極大条件を直ちに判定する。(2) は絶対値の折れ点ごとに解く。(3) は増減から候補点だけを抽出し、端点値の差を a の 1 次式として比較する。

【解答】

(1) まず

$$f'(x) = -(2x - 1)(x - a)$$

なので、 $f'(a) = 0$ である。さらに

$$f''(x) = -4x + 2a + 1, \quad f''(a) = 1 - 2a$$

である。したがって $x = a$ で極大値をとるための条件は

$$1 - 2a < 0, \quad \text{すなわち} \quad a > \frac{1}{2}$$

である。 $a = \frac{1}{2}$ では $f'(x) = -2(x - \frac{1}{2})^2$ となり、極大ではない。

(2) 折れ点 $-1, 2$ で区切る。

範囲	$ x + 1 + x - 2 $
$x < -1$	$1 - 2x$
$-1 \leq x \leq 2$	3
$x > 2$	$2x - 1$

よって左側では $1 - 2x \leq 4$ から $x \geq -\frac{3}{2}$, 中央では常に成立し、右側では $2x - 1 \leq 4$ から $x \leq \frac{5}{2}$ である。したがって

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

となる。

(3) $a > \frac{1}{2}$ のもとで

$$f'(x) < 0 \ (x < \frac{1}{2}), \quad f'(x) > 0 \ (\frac{1}{2} < x < a), \quad f'(x) < 0 \ (x > a)$$

である。したがって最小値の候補は $x = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$, 最大値の候補は $x = -\frac{3}{2}$ と、区間内にある場合の $x = a$ である。

候補値は

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{30a + 27}{8}, & f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1 - 6a}{24}, \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{90a - 175}{24}, & f(a) &= \frac{a^2(2a - 3)}{6}. \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < a \leq \frac{5}{2}$ では $f(a) \leq \frac{25}{12}$ である一方、

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) > \frac{21}{4}$$

だから、最大値は常に

$$\frac{30a + 27}{8}$$

である。

最小値については

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{22 - 12a}{3}$$

である。よって

$$\min f = \begin{cases} \frac{90a - 175}{24} & \left(\frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6}\right), \\ \frac{1 - 6a}{24} & \left(a > \frac{11}{6}\right) \end{cases}$$

となる。境界 $a = \frac{11}{6}$ では 2 つの端点値が一致する。

【総評】 難度 5, 計算量 6. 想定時間は 18 分程度。導関数の根の順序で極大条件を決めたあと、閉区間上の増減と端点値を比較する標準問題である。最小値は $a = \frac{11}{6}$ を境に場合分けが必要で、ここを落とさず整理できるかが得点差になる。

【第 2 問】

座標平面において、2 つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 $A(1, 1)$, 点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直であるとする。このとき、 B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり、 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直であるとする。このとき、 D の座標を求めよ。

(3) B, D はそれぞれ (1), (2) で定めたものとする。このとき、四角形 $ABCD$ が正方形であることを示せ。

▶ 解法 1 (内積条件を直接因数分解)

【方針】

放物線上の点をそれぞれ文字で置き、垂直条件を内積ゼロとして方程式にする。既知点 A, C に対応する解を除き、残る実数解を求める。最後は隣り合う辺の長さと内積を計算して正方形を示す。

【解答】

(1) $B = (u, u^2)$ とおく。垂直条件より

$$(u-1)(u-\sqrt{2}+1) + (u^2-1)(u^2-\sqrt{2}-1) = 0$$

である。 $u=1$ は点 A に対応するので除く。左辺を $u-1$ で割ると

$$u^3 + u^2 - \sqrt{2}u - 2\sqrt{2} = 0$$

すなわち

$$(u-\sqrt{2})\{u^2 + (\sqrt{2}+1)u + 2\} = 0$$

である。2 次式の判別式は負であるから、 $u = \sqrt{2}$ 。よって

$$B = (\sqrt{2}, 2)$$

である。

(2) $D = (v, -\sqrt{2}v^2 + 3v + \sqrt{2})$ とおく。垂直条件より

$$(v-1)(v-\sqrt{2}+1) + (-\sqrt{2}v^2 + 3v + \sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}v^2 + 3v - 1) = 0$$

である。整理すると

$$v\{v - (\sqrt{2}-1)\}\{v^2 - (2\sqrt{2}+1)v + 1 + 2\sqrt{2}\} = 0$$

となる。 $v = \sqrt{2}-1$ は点 C に対応し、2 次式の判別式は負である。したがって $v = 0$ であり、

$$D = (0, \sqrt{2})$$

である。

(3)

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}-1, 1), \quad \overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{2}-1)$$

であるから、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = 1 + (\sqrt{2}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

であり、さらに

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1) = 0$$

である。また

$$\overrightarrow{CD} = (1 - \sqrt{2}, -1) = -\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DA} = (1, 1 - \sqrt{2}) = -\overrightarrow{BC}$$

であるから、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。隣り合う辺の長さが等しく、かつそのなす角が直角であるので、四角形 $ABCD$ は正方形である。

▶ 解法 2 (直径 AC の円を利用)

【方針】

垂直条件を『点 B, D は直径 AC の円周上にある』と言い換える。円と 2 つの放物線の交点を求め、最後は 2 本の対角線が互いに二等分し、長さが等しく直交することから正方形と判定する。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$ は $\angle ABC = 90^\circ$ と同値である。したがって B は直径 AC の円周上にある。この円は

$$(x-1)(x-\sqrt{2}+1) + (y-1)(y-\sqrt{2}-1) = 0$$

で表される。

ここに $y = x^2$ を代入すると

$$(x-1)(x-\sqrt{2})\{x^2 + (\sqrt{2}+1)x + 2\} = 0$$

を得る。最後の 2 次式の判別式は

$$(\sqrt{2}+1)^2 - 8 = 2\sqrt{2} - 5 < 0$$

である。 $x = 1$ は点 A なので除き、

$$B = (\sqrt{2}, 2)$$

となる。

(2) 同様に $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$ より、 D も直径 AC の円周上にある。第 2 の放物線

$$y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

を円の方程式へ代入して整理すると

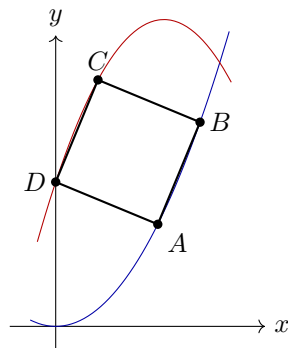
$$x\{x - (\sqrt{2}-1)\}\{x^2 - (2\sqrt{2}+1)x + 2\sqrt{2}+1\} = 0$$

となる。最後の 2 次式の判別式は $5 - 4\sqrt{2} < 0$ 、また $x = \sqrt{2}-1$ は点 C に対応する。よって

$$D = (0, \sqrt{2})$$

である。

(3) 4 点の配置は次のようになる。



対角線の中点はともに

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

であるから、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。また

$$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{2}-2, \sqrt{2}), \quad \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}-2)$$

より

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 = 8 - 4\sqrt{2}, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

対角線が等しい平行四辺形は長方形であり、対角線が直交する平行四辺形はひし形である。したがって両方を満たす $ABCD$ は正方形である。

【総評】 難度 4, 計算量 5. 想定時間は 15 分程度。座標を置いて内積ゼロを解けばよいが、既知点に対応する解を除く処理と、最後に正方形である根拠を辺の長さ・直角で明示することが重要である。

【第 3 問】

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目, 2 回目, 3 回目に出た目をそれぞれ a, b, c とし,

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ。

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, $f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ。

(4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, 少なくとも 1 つが正の解である条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1 (場合の数で条件事象を数える)

【方針】

(1)(2) は文系類題と同じく (b, c) の数え上げと a の偶奇で処理する。(3) は $f'(1) = 2(-1)^a + b$ を用いる。(4) は, a が偶数なら実数解があっても 2 解はともに負, a が奇数なら積が負で一方が正になることを使う。

【解答】

(1) $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の順に, $b^2 > 4c$ を満たす c の個数は

$$0, 0, 2, 3, 6, 6$$

であるから, 求める確率は

$$\frac{17}{36}$$

である。

(2) a が偶数のとき, 判別式は $b^2 - 4c$ であるから有利な (b, c) は 17 通りである。 a が奇数のとき, 判別式は $b^2 + 4c$ で常に正である。よって有利な組は

$$3 \cdot 17 + 3 \cdot 36 = 159$$

通りである。全体は 216 通りなので, 求める確率は

$$\frac{159}{216} = \frac{53}{72}$$

である。

(3)

$$f'(1) = 2(-1)^a + b$$

である。 $f'(1) = 7$ となるのは, a が偶数で $b = 5$ のときだけである。このとき $25 > 4c$ は $c = 1, 2, \dots, 6$ のすべてで成り立つ。したがって有利な組は $3 \cdot 6 = 18$ 通りであり, 条件付き確率は

$$\frac{18}{159} = \frac{6}{53}$$

である。

(4) a が偶数のとき, 方程式は $x^2 + bx + c = 0$ であり, 実数解をもつ場合でも, 解の和は $-b < 0$, 解の積は $c > 0$ なので 2 解はともに負である。 a が奇数のとき, 方程式は $-x^2 + bx + c = 0$, すなわち $x^2 - bx - c = 0$ であり, 解の積が $-c < 0$ なので一方は正, 一方は負である。したがって有利な組は, a が奇数であるすべての場合の

$$3 \cdot 36 = 108$$

通りである。よって条件付き確率は

$$\frac{108}{159} = \frac{36}{53}$$

である。

▶ 解法 2 (条件付き確率を確率の商で求める)

【方針】

判別式条件を第 1 投の偶奇で分け、各事象の確率を先に求める。(3)(4) は条件事象との共通部分の確率を計算し、 $P(A | E) = P(A \cap E) / P(E)$ に代入する。

【解答】

(1) b ごとに $b^2 > 4c$ を満たす c の個数を数えると

b	1	2	3	4	5	6
$\#c$	0	0	2	3	6	6

である。合計 17 通りなので

$$P(b^2 > 4c) = \frac{17}{36}$$

となる。

(2) 異なる 2 実根をもつ事象を E とする。 a が偶数なら判別式は $b^2 - 4c$ なので

$$P(E | a \text{ が偶数}) = \frac{17}{36}.$$

a が奇数なら判別式は $b^2 + 4c > 0$ なので、この条件付き確率は 1 である。偶数・奇数の確率はいずれも $\frac{1}{2}$ だから

$$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{36} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{53}{72}.$$

(3)

$$f'(1) = 2(-1)^a + b.$$

これが 7 になるには、 a が偶数かつ $b = 5$ でなければならない。このとき $25 > 4c$ は全ての c で成り立つから、自動的に E に含まれる。よって

$$P(E \cap \{f'(1) = 7\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

したがって

$$P(f'(1) = 7 | E) = \frac{1/12}{53/72} = \frac{6}{53}.$$

(4) a が偶数なら

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

であり、2 実根が存在するとき、根の和は $-b < 0$ 、積は $c > 0$ だから 2 根はともに負である。一方、 a が奇数なら

$$f(x) = -(x^2 - bx - c)$$

であり、方程式の根の積は $-c < 0$ だから、常に一方が正、一方が負である。したがって『少なくとも 1 つが正』と E の共通部分は、ちょうど a が奇数である事象であり、その確率は $\frac{1}{2}$ である。よって

$$P(\text{少なくとも 1 つが正} | E) = \frac{1/2}{53/72} = \frac{36}{53}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 15 分程度。(1)(2) の分母・分子を個数で管理し、(4) で根の符号を解と係数の関係から判断するのが中心である。条件付き確率の分母を常に 159 通りにそろえると計算が安定する。

【第 4 問】

a, b, c を実数とし、2 次方程式

$$x^2 + x - (c - 1) = 0$$

が実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。さらに、

$$a + b = c^2, \quad a\alpha + b\beta + c = 0$$

が成り立つとき、次の問いに答えよ。

(1) α, β および $b - a$ を、それぞれ c を用いて表せ。

以下では a, b, c を自然数とする。

(2) $\sqrt{4c - 3}$ が自然数でないとき、自然数 a, b, c の組を求めよ。

(3) 自然数 s を用いて $4c - 3 = s^2$ と表せるとき、 s と a は

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

を満たすことを示せ。

(4) (3) のとき、自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (平方根の有理・無理で分類)

【方針】

解と係数の関係から α, β を求め、 $a\alpha + b\beta + c = 0$ を $a + b$ と $b - a$ で整理する。自然数条件では $b - a$ が整数であることを使い、平方でない場合は不合理を避けるため $c = 2$ に絞る。平方の場合は $c = (s^2 + 3)/4$ を代入し、最後は $s \mid 15$ を導いて有限個を調べる。

【解答】

(1) 判別式は $4c - 3$ であるから、

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{4c - 3}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{4c - 3}}{2}$$

である。また

$$a\alpha + b\beta = -\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{4c-3}$$

であり、 $a + b = c^2$ を用いると

$$-\frac{c^2}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{4c-3} + c = 0$$

である。したがって

$$b - a = \frac{c(c-2)}{\sqrt{4c-3}}$$

である。

(2) c は自然数である。 $\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき、これは整数の平方根でありながら整数でないので有理数ではない。一方、 $b-a$ は整数であるから、(1) の等式より $c(c-2) = 0$ でなければならない。 c は自然数なので $c = 2$ 。このとき $b-a = 0$ 、 $a+b = 4$ であるから

$$(a, b, c) = (2, 2, 2)$$

である。

(3) $4c - 3 = s^2$ とすると、 $c = \frac{s^2 + 3}{4}$ である。また (1) と $a + b = c^2$ より

$$c^2 - 2a = \frac{c(c-2)}{s}$$

である。両辺に s をかけ、 $c = \frac{s^2 + 3}{4}$ を代入して 16 倍すると

$$s\{(s^2 + 3)^2 - 32a\} = (s^2 + 3)(s^2 - 5)$$

である。これを整理して

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

を得る。

(4) (1) より

$$b - a = \frac{c(c-2)}{s}$$

である。 $c = \frac{s^2+3}{4}$ だから、 s は奇数であり、 s は $c(c-2)$ を割り切る。ここで

$$16c(c-2) = (s^2+3)(s^2-5)$$

であり、 s は奇数なので、 s は $(s^2+3)(s^2-5)$ を割り切る。右辺は s で割った余りが $3 \cdot (-5) = -15$ と等しいから、 s は 15 の正の約数である。よって

$$s = 1, 3, 5, 15$$

を調べればよい。 $s = 1$ では $c = 1$, $b - a = -1$, $a + b = 1$ となり、 $b = 0$ となるので不適である。 $s = 3, 5, 15$ について計算すると、それぞれ

$$(a, b, c) = (4, 5, 3), \quad (21, 28, 7), \quad (1520, 1729, 57)$$

である。したがって求める組はこの 3 組である。

▶ 解法 2 (和と差を未知数にする)

【方針】

$p = a + b$, $q = b - a$ とおくと、条件式が p, q の 1 次式になる。非平方の場合は有理数と無理数の分離、平方の場合は問題文で示した恒等式から $s \mid 15$ を直接読み取り、候補を有限個に絞る。

【解答】

(1) $d = \sqrt{4c-3}$ とおく。解の公式から

$$\alpha = \frac{-1-d}{2}, \quad \beta = \frac{-1+d}{2}.$$

ここで

$$p = a + b, \quad q = b - a$$

とおけば

$$a\alpha + b\beta = -\frac{p}{2} + \frac{qd}{2}.$$

条件 $p = c^2$ と $a\alpha + b\beta + c = 0$ を用いると

$$-\frac{c^2}{2} + \frac{qd}{2} + c = 0.$$

したがって

$$b - a = q = \frac{c(c-2)}{\sqrt{4c-3}}.$$

(2) $4c-3$ は整数であり、その平方根が自然数でないなら、 $d = \sqrt{4c-3}$ は無理数である。一方、 $q = b - a$ は整数なので

$$qd = c(c-2)$$

の左辺は、 $q \neq 0$ なら無理数、右辺は整数となって矛盾する。よって $q = 0$ 、さらに $c(c-2) = 0$ である。 c は自然数だから $c = 2$ 。

$$a + b = 4, \quad b - a = 0$$

より

$$(a, b, c) = (2, 2, 2).$$

(3) $4c-3 = s^2$ なら

$$c = \frac{s^2+3}{4}.$$

また (1) の式と $b = c^2 - a$ から

$$2as = (s-1)c^2 + 2c$$

を得る。ここへ $c = \frac{s^2 + 3}{4}$ を代入し、両辺を 16 倍すると

$$32as = (s - 1)(s^2 + 3)^2 + 8(s^2 + 3).$$

右辺を展開して左辺へ移せば

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

となる。

(4) (3) の等式を

$$s\{s^4 - s^3 + 6s^2 + 2s + 9 - 32a\} = -15$$

と書く。中括弧内は整数なので、正の整数 s は 15 の約数である。したがって

$$s = 1, 3, 5, 15$$

だけを調べればよい。各 s に対し

$$c = \frac{s^2 + 3}{4}, \quad 2as = (s - 1)c^2 + 2c, \quad b = c^2 - a$$

を使うと

s	c	a	b
1	1	1	0
3	3	4	5
5	7	21	28
15	57	1520	1729

となる。 $s = 1$ は $b = 0$ で自然数条件に反する。よって全ての組は

$$(a, b, c) = (4, 5, 3), (21, 28, 7), (1520, 1729, 57)$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 8. 想定時間は 30 分程度。前半の式整理は標準的だが、後半は自然数条件から割り切りを取り出す発想が必要である。採点上は、平方でない場合の $c = 2$ の絞り込み、平方の場合の $s \mid 15$ の導出、最後の候補確認が主要点である。

【第 5 問】

座標平面において、曲線 $y = e^x$ 上の点 $P(t, e^t)$ における法線を l とし、 l と y 軸との交点を Q とする。 $t \neq 0$ のときは線分 PQ の中点を R とし、 $t = 0$ のときは $R(0, 1)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) t が実数全体を動くとき、点 R の描く曲線 C の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C , y 軸, 直線 $y = e^{-2} + e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。
- (4) 図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (法線から軌跡を消去)

【方針】

法線の傾きは接線の傾きの負の逆数である。 Q を求めて中点座標を t で表し、 $X = \frac{t}{2}$ において軌跡の方程式にする。面積と体積は $0 \leq X \leq 1$ で上側の水平線から曲線を引いて積分する。

【解答】

(1) 曲線 $y = e^x$ の $x = t$ における接線の傾きは e^t である。したがって法線の傾きは $-e^{-t}$ であり、

$$l: y - e^t = -e^{-t}(x - t)$$

である。

(2) (1) より、 l と y 軸との交点は

$$Q = (0, te^{-t} + e^t)$$

である。 $t \neq 0$ のとき、 R の座標は

$$\left(\frac{t}{2}, e^t + \frac{t}{2}e^{-t} \right)$$

である。 $X = \frac{t}{2}$ とおくと、 $t = 2X$ だから

$$y = e^{2X} + Xe^{-2X}$$

となる。 $t = 0$ のときも $(X, y) = (0, 1)$ でこの式を満たす。 よって曲線 C は

$$y = e^{2x} + xe^{-2x} \quad (-\infty < x < \infty)$$

である。

(3) $x = 1$ のとき、 曲線 C 上の点の y 座標は $e^2 + e^{-2}$ である。 したがって求める面積は

$$\int_0^1 \{e^2 + e^{-2} - (e^{2x} + xe^{-2x})\} dx$$

である。 ここで

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{2}, \quad \int_0^1 xe^{-2x} dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$$

より、 面積は

$$\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}e^{-2}$$

である。

(4) 回転体の体積は

$$\pi \int_0^1 \{(e^2 + e^{-2})^2 - (e^{2x} + xe^{-2x})^2\} dx$$

である。 さらに

$$(e^{2x} + xe^{-2x})^2 = e^{4x} + 2x + x^2e^{-4x}$$

であり、

$$\int_0^1 x^2e^{-4x} dx = \frac{1 - 13e^{-4}}{32}$$

である。 したがって体積は

$$\pi \left(\frac{3}{4}e^4 + \frac{39}{32} + \frac{45}{32}e^{-4} \right)$$

である。

▶ 解法 2 (媒介変数表示と積分計算の詳述)

【方針】

点 Q と中点 R を t で表し, $t = 2x$ で媒介変数を消去する。囲まれる範囲を単調性で確認し, 面積・体積の積分は項ごとに独立した表示数式で計算する。

【解答】

(1) 曲線 $y = e^x$ の点 $P(t, e^t)$ における接線の傾きは e^t である。したがって法線の傾きは $-e^{-t}$ であり,

$$l: y - e^t = -e^{-t}(x - t)$$

となる。

(2) $x = 0$ を法線の式へ代入すると

$$Q = (0, e^t + te^{-t}).$$

よって中点 R は

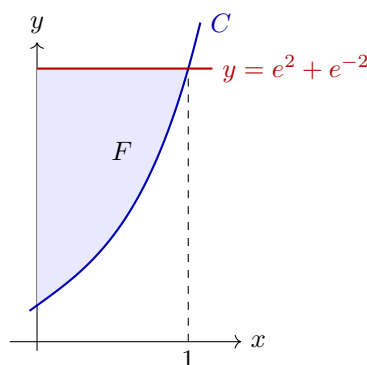
$$R\left(\frac{t}{2}, e^t + \frac{t}{2}e^{-t}\right)$$

である。 $R = (x, y)$ と書けば $t = 2x$ なので

$$C: y = e^{2x} + xe^{-2x}$$

を得る。 $t = 0$ の場合も右辺は 1 となり, 指定された点 $R(0, 1)$ を含む。

点・法線・軌跡の関係は次の図のようになる。



(3) $g(x) = e^{2x} + xe^{-2x}$ とおくと

$$g'(x) = e^{-2x}\{1 - 2x + 2e^{4x}\}.$$

中括弧内の最小値は $x = -\frac{1}{2}\log 2$ で $\frac{3}{2} + \log 2 > 0$ だから, g は単調増加する。したがって図形 F は $0 \leq x \leq 1$ にあり, その面積 S は

$$S = \int_0^1 \{e^2 + e^{-2} - e^{2x} - xe^{-2x}\} dx.$$

各積分を分けて計算すると

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{2},$$

$$\int_0^1 xe^{-2x} dx = \left[-\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}.$$

ゆえに

$$S = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}e^{-2}.$$

(4) 円板の差を積分するから, 体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 \left[(e^2 + e^{-2})^2 - (e^{2x} + xe^{-2x})^2 \right] dx.$$

曲線の式の平方は

$$(e^{2x} + xe^{-2x})^2 = e^{4x} + 2x + x^2e^{-4x}$$

である。ここで部分積分を 2 回行うと

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{-4x} dx &= \left[-e^{-4x} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{32} - \frac{13}{32} e^{-4}.\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^1 (e^{2x} + x e^{-2x})^2 dx = \frac{1}{4} e^4 + \frac{25}{32} - \frac{13}{32} e^{-4}.$$

また

$$(e^2 + e^{-2})^2 = e^4 + 2 + e^{-4}$$

なので、差を整理して

$$V = \pi \left(\frac{3}{4} e^4 + \frac{39}{32} + \frac{45}{32} e^{-4} \right)$$

を得る。

【総評】 難度 6, 計算量 7. 想定時間は 25 分程度。法線から中点の軌跡を正しく出せば、後半は標準的な面積・回転体積分である。指数関数を含む積分の計算がやや重く、(4) では二乗展開後に項別に処理する整理力が必要である。

【第 6 問】

座標平面において、 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $P(3,0)$ とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする三角形 OAB を考える。ただし、円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。
- (2) 円 C の半径を r とするとき、 r のとる値の範囲を求めよ。
- (3) r が (2) の範囲で変化するとき、点 B の軌跡の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。

▶ 解法 1 (接線長とヘロンの公式)

【方針】

接線の長さが同じであることから、辺 OA 上の接点 P に対して $OP = 3$, $AP = 1$ を使い、 $OB - AB$ を求める。半径の範囲は、頂点 B からの接線長を文字で置いて面積公式 $K = rs$ とヘロン型の計算で求める。軌跡は $OB - AB = 2$ を焦点差一定の式として座標化する。

【解答】

(1) 内接円が OA と接する点が P であり、 $OP = 3$, $AP = 1$ である。接点までの 2 本の接線の長さは同じなので、頂点 B から内接円への接線の長さを x とおくと

$$OB = 3 + x, \quad AB = 1 + x$$

である。よって

$$OB - AB = 2$$

であり、一定である。

(2) (1) の x を用いると、三角形の 3 辺は 4 , $3 + x$, $1 + x$ であり、半周長は $x + 4$ である。面積を K とすると、内接円の半径が r であるから

$$K = (x + 4)r$$

である。一方、辺の長さから

$$K^2 = (x + 4)x \cdot 1 \cdot 3 = 3x(x + 4)$$

である。したがって

$$r^2 = \frac{3x}{x + 4}$$

である。 $x > 0$ より

$$0 < r < \sqrt{3}$$

である。

(3) $B = (X, Y)$ とおく。 B は x 軸より上にあるので $Y > 0$ である。(1) より

$$\sqrt{X^2 + Y^2} - \sqrt{(X-4)^2 + Y^2} = 2$$

である。これを整理すると

$$(X-2)^2 - \frac{Y^2}{3} = 1$$

を得る。さらに差が正であるから右側の枝であり、 $Y > 0$ も合わせて

$$(X-2)^2 - \frac{Y^2}{3} = 1, \quad X > 3, \quad Y > 0$$

である。概形は、中心が $(2, 0)$ 、頂点が $(3, 0)$ 、漸近線が $Y = \pm\sqrt{3}(X-2)$ である双曲線の右上の枝である。

▶ 解法 2 (接線の傾きで媒介表示)

【方針】

内心を $I(3, r)$ と置き、 O, A から円へ引いた接線の傾きを点と直線の距離で求める。2 本の接線の交点として B を r で媒介表示すれば、半径の範囲と双曲線の方程式が同時に得られる。

【解答】

(1) 円と辺 OB, AB の接点をそれぞれ R, Q とする。同一点から円へ引いた接線の長さは等しいから

$$OR = OP = 3, \quad AQ = AP = 1, \quad BR = BQ.$$

したがって

$$OB = 3 + BR, \quad AB = 1 + BQ$$

であり、

$$OB - AB = 2$$

は一定である。

(2) 内心は $I(3, r)$ である。辺 OB を $y = mx$ とおく。中心 I とこの直線の距離が r だから

$$\frac{3m - r}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

であり、0 でない接線の傾きは

$$m = \frac{6r}{9 - r^2}.$$

同様に、辺 AB を $y = n(x-4)$ とおくと、 $r \neq 1$ のとき

$$n = -\frac{2r}{1 - r^2}.$$

2 直線の交点を $B = (X, Y)$ とすると

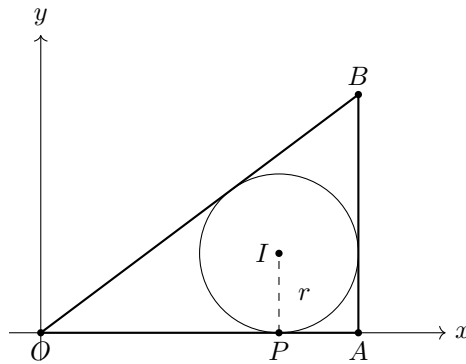
$$X = \frac{9 - r^2}{3 - r^2}, \quad Y = \frac{6r}{3 - r^2}.$$

$r = 1$ の場合は AB が垂直線 $x = 4$ となり、上式の極限と同じく $B = (4, 3)$ である。

点 B が第 1 象限にあるには $Y > 0$ が必要十分であり、 $r > 0$ と合わせて

$$0 < r < \sqrt{3}$$

を得る。逆にこの範囲の各 r について上の 2 接線は第 1 象限で交わるので、範囲内の値はすべて実現する。



(3) 媒介表示から

$$X - 2 = \frac{3 + r^2}{3 - r^2}, \quad Y = \frac{6r}{3 - r^2}.$$

したがって

$$(X - 2)^2 - \frac{Y^2}{3} = \frac{(3 + r^2)^2 - 12r^2}{(3 - r^2)^2} = 1.$$

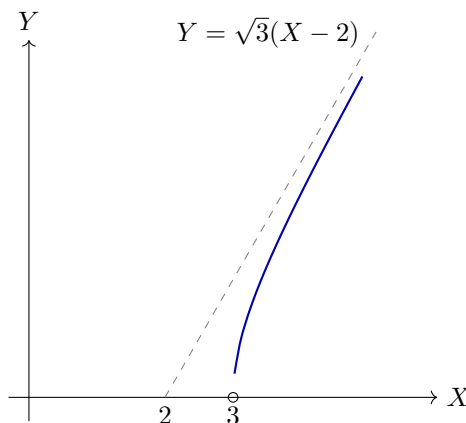
また $0 < r < \sqrt{3}$ より

$$X - 3 = \frac{2r^2}{3 - r^2} > 0, \quad Y > 0.$$

よって軌跡は

$$(X - 2)^2 - \frac{Y^2}{3} = 1, \quad X > 3, \quad Y > 0$$

である。



中心は $(2, 0)$ ，頂点は $(3, 0)$ ，漸近線は $Y = \pm\sqrt{3}(X - 2)$ であり，図の右上の枝から頂点を除いた部分である。

【総評】 難度 6，計算量 5。想定時間は 20 分程度。内接円の接線長から辺の差が一定になることを見抜くと，軌跡は焦点差一定の双曲線として処理できる。半径の範囲では端点を含めないこと，軌跡では上側かつ右側の枝に限ることが重要である。