

入 学 試 験 問 題

数 学



広島大学 2023 年度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし、 N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し、書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し、カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。(1) $X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ。(2) X, Y, Z, W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ。(3) X, Y, Z, W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ。(4) X, Y, Z, W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ。

第 2 問

原点を O とする座標平面上の 2 点 $A(3, 0), B(1, 1)$ を考える. α, β を実数とし, 点 $P(\alpha, \beta)$ は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないとする. 直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし, 直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする. 次の問いに答えよ. (1) 点 Q および点 R の座標を, α, β を用いて表せ. (2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. さらに, このときの交点 S の座標を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. (3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. さらに, このときの交点 T の座標を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. (4) α, β は (2) と (3) の両方の条件を満たすとし, S, T は (2), (3) で定めた点であるとする. このとき, 直線 OA と直線 BS が垂直となり, 直線 OB と直線 AT が垂直となる α, β の値を求めよ.

第 3 問

空間内の 6 点 A, B, C, D, E, F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 $ABCD$ は正方形であるとする． $\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{AD}, \vec{e} = \overrightarrow{AE}$ とおくとき，次の問いに答えよ．(1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{d}, \vec{b} \cdot \vec{e}, \vec{d} \cdot \vec{e}$ の値を求めよ．(2) $\overrightarrow{AF} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ．(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする．また， $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする． t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき， $\triangle AGH$ の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle AGH$ の面積を求めよ．《編注》数学 I・数学 II・数学 A・数学 B には (3) に次の加筆がある．「必要ならば， $\triangle AGH$ の面積 S について $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 |\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH})^2}$ が成り立つことを用いてよい．」

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2, a_{n+1} = \left(\frac{n^6(n+1)}{(a_n)^3}\right)^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める. また $b_n = \log_2 \frac{a_n}{n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. 次の問いに答えよ. 必要ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log_2 n}{6^{2n}} = 0$ であることを用いてよい. (1) b_1, b_2 を求めよ. (2) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 k = 0$ であることを示せ. (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 a_{2k}$ を求めよ.

第 5 問

関数 $f(x) = \log \frac{3x+3}{x^2+3}$ について、次の問いに答えよ. (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ. ただし、グラフの凹凸は調べなくてよい. (2) s を定数とすると、次の x についての方程式 $(*)$ の異なる実数解の個数を調べよ. $(*) \quad f(x) = s$ (3) 定積分

$$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3} dx$$

の値を求めよ. (4) (2) の $(*)$ が実数解をもつ s に対して、(2) の $(*)$ の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする. ただし、(2) の $(*)$ の実数解が一つだけであるときには $g(s) = 0$ とする. 関数 $f(x)$ の最大値を α とおくと、定積分

$$\int_0^\alpha g(s) ds$$

の値を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)