

広島大学 2023 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし、 N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し、書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し、カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。(1) $X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ。(2) X, Y, Z, W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ。(3) X, Y, Z, W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ。(4) X, Y, Z, W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

全事象を順序付きの 4 回の結果として数え、総数を N^4 とする。同じ番号の個数の分布ごとに、番号の選び方と位置の選び方を分けて数える。

【解答】

(1) 全事象は N^4 通りである。4 回とも同じ番号である場合は、その番号の選び方が N 通りであるから、求める確率は

$$\frac{N}{N^4} = \frac{1}{N^3}$$

である。

(2) 4 回で互いに異なる番号が出る場合は、順に番号を選ぶと

$$N(N-1)(N-2)(N-3)$$

通りである。したがって求める確率は

$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4} = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}$$

である。

(3) 3 回出る番号を選ぶ方法が N 通り、残り 1 回に出る番号を選ぶ方法が $N-1$ 通り、その残り 1 回の位置が 4 通りである。よって求める確率は

$$\frac{4N(N-1)}{N^4} = \frac{4(N-1)}{N^3}$$

である。

(4) 4 回のうち、ちょうど 1 組だけ同じ番号になる。2 回出る番号の選び方が N 通り、その位置の選び方が ${}_4C_2 = 6$ 通り、残り 2 か所に入る異なる番号の選び方が順序も含めて $(N-1)(N-2)$ 通りである。したがって求める確率は

$$\frac{6N(N-1)(N-2)}{N^4} = \frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}$$

である。

▶ 解法 2 (使われた番号の集合と並べ方を先に数える方法)

【方針】

4 回の結果を長さ 4 の列とみなす。先に「使われた番号の集合」を選び、次に各番号が少なくとも 1 回現れる並べ方を数える。重複の型を明示すれば、数え漏れと二重計数を同時に防げる。

【解答】

どの結果も同様に確からしく、結果の総数は

$$N^4$$

である。

(1) 使われる番号を 1 個選べば、列はその番号だけで決まる。したがって該当する列は N 個で、

$$\Pr(X = Y = Z = W) = \frac{N}{N^4} = \frac{1}{N^3}.$$

(2) 使う 4 番号の集合を選ぶ方法が ${}_N C_4$ 通り、その 4 番号を 4 か所に並べる方法が $4!$ 通りである。よって

$$\Pr(4 \text{ 個とも異なる}) = \frac{{}_N C_4 4!}{N^4} = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}.$$

(3) 使う 2 番号の集合を選び、そのうち 3 回現れる番号を指定し、その位置を選ぶ。該当する列は

$${}_N C_2 \cdot 2 \cdot {}_4 C_3 = 4N(N-1)$$

個である。したがって

$$\Pr(3 \text{ 個が同じで残り 1 個が異なる}) = \frac{4N(N-1)}{N^4} = \frac{4(N-1)}{N^3}.$$

(4) 使われる 3 番号の出現回数は $2, 1, 1$ である。まず 3 番号の集合を選び、2 回現れる番号を選び、その番号の 2 位置を選び、残り 2 番号を並べる。したがって該当する列は

$${}_N C_3 \cdot 3 \cdot {}_4 C_2 \cdot 2! = 36 {}_N C_3 = 6N(N-1)(N-2)$$

個である。よって

$$\Pr(\text{異なる番号がちょうど 3 個}) = \frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}.$$

【総評】 目安時間は 12~15 分。標準解法は位置や番号を順に選び、別解は「使われた番号の集合」と重複型で統一して数えた。(4) の型は $2, 1, 1$ だけであり、2 回現れる番号の指定 3 通りと、残り 2 番号の並べ方 $2!$ を落とさない。各分子を全列数 N^4 で割る前に、 $N = 4$ などで個数が整数になることを確認すると安全である。

【第 2 問】

原点を O とする座標平面上の 2 点 $A(3,0), B(1,1)$ を考える. α, β を実数とし, 点 $P(\alpha, \beta)$ は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないとする. 直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし, 直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする. 次の問いに答えよ. (1) 点 Q および点 R の座標を, α, β を用いて表せ. (2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. さらに, このときの交点 S の座標を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. (3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. さらに, このときの交点 T の座標を, α, β のうちの必要なものを用いて表せ. (4) α, β は (2) と (3) の両方の条件を満たすとし, S, T は (2), (3) で定めた点であるとする. このとき, 直線 OA と直線 BS が垂直となり, 直線 OB と直線 AT が垂直となる α, β の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

反射先を座標で表し, 直線 QR を媒介変数で表す. OA との交点は $y = 0$, OB との交点は $y = x$ を代入して求め, 最後は垂直条件を座標の条件に直す.

【解答】

(1) OA は x 軸であり, OB は直線 $y = x$ である. したがって

$$Q = (\alpha, -\beta), \quad R = (\beta, \alpha)$$

である.

(2) 直線 QR 上の点を

$$(\alpha, -\beta) + u(\beta - \alpha, \alpha + \beta)$$

と表す. OA との交点では $y = 0$ であるから

$$-\beta + u(\alpha + \beta) = 0$$

である. よって交点をもつための条件は $\alpha + \beta \neq 0$ であり, このとき

$$u = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

である. したがって

$$S = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}, 0 \right)$$

である.

(3) OB との交点では $x = y$ であるから

$$\alpha + u(\beta - \alpha) = -\beta + u(\alpha + \beta)$$

となる. これは

$$\alpha + \beta = 2\alpha u$$

であるから, 交点をもつための条件は $\alpha \neq 0$ であり, このとき

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha}$$

である. よって

$$T = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \right)$$

である.

(4) (2), (3) より $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ である. 直線 OA と直線 BS が垂直であるためには, BS が鉛直であればよい. 点 B の x 座標は 1 であるから

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} = 1$$

である. また, 直線 OB の傾きは 1 であるから, 直線 AT の傾きが -1 であればよい. したがって

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} = \frac{3}{2}$$

である。よって

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha + \beta, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha$$

が成り立つ。これらから $\beta = 2\alpha$ であり、

$$5\alpha^2 = 3\alpha$$

となる。ここで $\alpha \neq 0$ より

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad \beta = \frac{6}{5}$$

である。

▶ 解法 2 (直線 QR の法線ベクトルを直接求める方法)

【方針】

反射で得た Q, R を結ぶ直線を、傾きではなく法線方程式で表す。軸との交点は代入だけで求め、最後の垂直条件も方向ベクトルの内積が 0 という形で処理できる。

【解答】

(1) 直線 OA は x 軸、直線 OB は $y = x$ である。したがって

$$Q = (\alpha, -\beta), \quad R = (\beta, \alpha).$$

(2)(3) $\overrightarrow{QR} = (\beta - \alpha, \alpha + \beta)$ だから、その法線ベクトルとして

$$(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

をとれる。点 Q を通ることを用いると、直線 QR の方程式は

$$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y = \alpha^2 + \beta^2. \quad (1)$$

となる。

OA との交点では $y = 0$ であるから、交点をもつ条件は

$$\alpha + \beta \neq 0$$

であり、

$$S = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}, 0 \right).$$

OB との交点では $y = x$ であるから、(1) は

$$2\alpha x = \alpha^2 + \beta^2$$

となる。したがって交点をもつ条件は

$$\alpha \neq 0$$

であり、

$$T = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} \right).$$

(4) $S = (s, 0)$ とおく。 OA の方向ベクトルは $(1, 0)$ なので、

$$OA \perp BS \iff (1, 0) \cdot (s - 1, -1) = 0 \iff s = 1.$$

よって

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} = 1. \quad (2)$$

また $T = (t, t)$ とおくと、 OB の方向ベクトルは $(1, 1)$ であるから

$$OB \perp AT \iff (1, 1) \cdot (t - 3, t) = 0 \iff t = \frac{3}{2}.$$

よって

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha} = \frac{3}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha. \quad (3)$$

(2),(3) の右辺を比較すると

$$\alpha + \beta = 3\alpha, \quad \text{すなわち} \quad \beta = 2\alpha.$$

これを (3) に代入して

$$5\alpha^2 = 3\alpha.$$

交点条件より $\alpha \neq 0$ だから

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad \beta = \frac{6}{5}.$$

【総評】 目安時間は 18～22 分。標準解法は反射点を結んで交点を個別に計算し、別解は QR の法線方程式を先に作った。交点条件 $\alpha + \beta \neq 0, \alpha \neq 0$ と、問題冒頭の「 P は 2 直線上にない」という条件を混同しない。(4) では 2 本の垂線条件から同じ量 $\alpha^2 + \beta^2$ を二通りに表し、先に $\beta = 2\alpha$ を得ると計算が短い。

【第 3 問】

空間内の 6 点 A, B, C, D, E, F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり、四角形 $ABCD$ は正方形であるとする。 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{AD}, \vec{e} = \overrightarrow{AE}$ とおくとき、次の問いに答えよ。(1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{d}, \vec{b} \cdot \vec{e}, \vec{d} \cdot \vec{e}$ の値を求めよ。(2) $\overrightarrow{AF} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ。(3) 辺 BE を 1 : 2 に内分する点を G とする。また、 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し、辺 CF を $t : (1-t)$ に内分する点を H とする。 t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $\triangle AGH$ の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle AGH$ の面積を求めよ。《編注》数学 I・数学 II・数学 A・数学 B には (3) に次の加筆がある。「必要ならば、 $\triangle AGH$ の面積 S について $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2 |\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH})^2}$ が成り立つことを用いてよい。」

▶ 解法 1

【方針】

正八面体の隣り合う辺の長さがすべて 1 であることから内積を求める。 F は E の反対側の頂点なので $\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{e}$ と表せる。面積は与えられた公式に $\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AH}$ を代入し、二次式を最小化する。

【解答】

(1) 四角形 $ABCD$ は正方形であるから

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

である。また、 $AB = AE = BE = 1$ より

$$|\vec{e} - \vec{b}|^2 = 1$$

である。したがって

$$1 + 1 - 2\vec{b} \cdot \vec{e} = 1$$

より

$$\vec{b} \cdot \vec{e} = \frac{1}{2}$$

である。同様に

$$\vec{d} \cdot \vec{e} = \frac{1}{2}$$

である。

(2) 正八面体では、 E と F は正方形 $ABCD$ の中心に関して反対側にある。よって

$$\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{e}$$

である。したがって

$$p = 1, \quad q = 1, \quad r = -1$$

である。

(3) $BG : GE = 1 : 2$ であるから

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{b} + \vec{e}}{3}$$

である。また、 $CH : HF = t : (1 - t)$ より

$$\overrightarrow{AH} = (1 - t)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AF} = \vec{b} + \vec{d} - t\vec{e}$$

である。(1) の内積を用いると

$$|\overrightarrow{AG}|^2 = \frac{7}{9}, \quad |\overrightarrow{AH}|^2 = t^2 - 2t + 2, \\ \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{3 - 2t}{3}$$

である。したがって面積を S とすると

$$S^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{7}{9}(t^2 - 2t + 2) - \frac{(3 - 2t)^2}{9} \right\} = \frac{3t^2 - 2t + 5}{36}$$

である。ここで

$$3t^2 - 2t + 5 = 3 \left(t - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{14}{3}$$

であるから、 $0 < t < 1$ において最小となるのは

$$t = \frac{1}{3}$$

のときである。このとき

$$S = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{14}{3}} = \frac{\sqrt{42}}{18}$$

である。

▶ 解法 2 (正八面体を座標化して外積で面積を求める方法)

【方針】

正方形 $ABCD$ を xy 平面に置き、残る 2 頂点を正方形の中心の真上・真下に置く。各点を座標で表した後、三角形の面積を外積の大きさで求めれば、内積表現とは独立に最小値を検算できる。

【解答】

次のように座標をとる。

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (1, 0, 0), \quad D = (0, 1, 0), \quad C = (1, 1, 0).$$

正方形の中心から頂点までの距離は $1/\sqrt{2}$ である。正八面体の各辺が 1 となるため、 E, F を

$$E = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

とおける。

(1)

$$\vec{b} = (1, 0, 0), \quad \vec{d} = (0, 1, 0), \quad \vec{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

であるから

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = \frac{1}{2}, \quad \vec{d} \cdot \vec{e} = \frac{1}{2}.$$

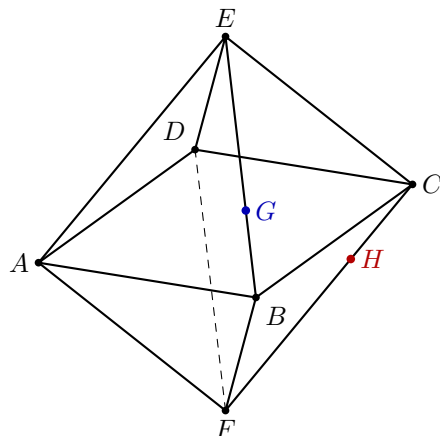
(2)

$$\overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \vec{b} + \vec{d} - \vec{e}$$

より

$$p = 1, \quad q = 1, \quad r = -1.$$

(3) 図のように、 G は BE を $1 : 2$ に、 H は CF を $t : (1 - t)$ に内分する。



内分点の公式から

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2B + E}{3} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right),$$

$$\overrightarrow{AH} = (1-t)C + tF = \left(1 - \frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{2}, -\frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

外積を計算すると

$$\overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AH} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1+2t}{3\sqrt{2}}, \frac{2-t}{3} \right).$$

したがって

$$\left| \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AH} \right|^2 = \frac{1}{18} + \frac{(1+2t)^2}{18} + \frac{(2-t)^2}{9} = \frac{3t^2 - 2t + 5}{9}.$$

三角形の面積を S とすれば

$$S^2 = \frac{1}{4} \left| \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AH} \right|^2 = \frac{3t^2 - 2t + 5}{36}.$$

ここで

$$3t^2 - 2t + 5 = 3 \left(t - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{14}{3}.$$

$0 < t < 1$ で $t = 1/3$ は許されるので

$$t = \frac{1}{3}, \quad S_{\min} = \frac{\sqrt{42}}{18}.$$

【総評】 目安時間は18～22分。標準解法は内積だけで完結し、別解は正八面体を座標化して外積で面積を求めた。 E, F の高さは、中心から正方形の頂点までの距離 $1/\sqrt{2}$ と三平方の定理から $1/\sqrt{2}$ と決まる。 $H = (1-t)C + tF$ の係数の向きを取り違えないこと、面積が外積の大きさの半分であることが要点である。

【第 4 問】

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2, a_{n+1} = \left(\frac{n^6(n+1)}{(a_n)^3}\right)^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める. また $b_n = \log_2 \frac{a_n}{n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. 次の問いに答えよ. 必要ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log_2 n}{6^{2n}} = 0$ であることを用いてよい. (1) b_1, b_2 を求めよ. (2) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ. (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 k = 0$ であることを示せ. (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 a_{2k}$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

漸化式を $\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}$ の形に直すと, $b_{n+1} = -6b_n$ が出る. (4) では $\log_2 a_{2k} = b_{2k} + 2 \log_2(2k)$ に分解し, 対数和は (3) で消えることを使う.

【解答】

(1)

$$a_1 = 2$$

より

$$b_1 = \log_2 2 = 1$$

である. また

$$a_2 = \left(\frac{1^6 \cdot 2}{2^3}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

であるから

$$b_2 = \log_2 \frac{1/16}{2^2} = \log_2 \frac{1}{64} = -6$$

である.

(2) 漸化式より

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{n^{12}}{a_n^6} = \left(\frac{a_n}{n^2}\right)^{-6}$$

である. したがって

$$b_{n+1} = \log_2 \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = -6 \log_2 \frac{a_n}{n^2} = -6b_n$$

である. よって $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 -6 の等比数列であり,

$$b_n = (-6)^{n-1}$$

である.

(3) $1 \leq k \leq n$ のとき $0 \leq \log_2 k \leq \log_2 n$ であるから

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \log_2 k \leq n \log_2 n$$

である. よって

$$0 \leq \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 k \leq \frac{n \log_2 n}{6^{2n}}$$

である. 右辺は与えられた極限により 0 に収束するので, はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 k = 0$$

である.

(4) (2) より

$$b_{2k} = (-6)^{2k-1} = -6^{2k-1}$$

である。また

$$\log_2 a_{2k} = b_{2k} + 2 \log_2(2k)$$

だから

$$\sum_{k=1}^n \log_2 a_{2k} = - \sum_{k=1}^n 6^{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^n \log_2(2k)$$

である。ここで

$$\sum_{k=1}^n 6^{2k-1} = 6(1 + 6^2 + \dots + 6^{2n-2}) = \frac{6(6^{2n} - 1)}{35}$$

であり、また

$$\frac{2}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2(2k) = \frac{2n}{6^{2n}} + \frac{2}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 k \rightarrow 0$$

である。したがって求める極限值は

$$-\frac{6}{35}$$

である。

▶ 解法 2 (一般項を先に求めて偶数項の和を分離する方法)

【方針】

b_n の漸化式を解いて a_n の閉じた形を先に得る。すると $\log_2 a_{2k}$ は「多項式的に増える項」と「等比的に増える項」に分かれ、極限への寄与を別々に評価できる。

【解答】

(1)(2) 定義から $a_n = n^2 2^{b_n}$ である。これを漸化式へ代入すると

$$a_{n+1} = \left\{ \frac{n^6(n+1)}{(n^2 2^{b_n})^3} \right\}^2 = (n+1)^2 2^{-6b_n}.$$

よって

$$b_{n+1} = \log_2 \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = -6b_n.$$

また

$$b_1 = \log_2 2 = 1, \quad b_2 = -6.$$

したがって $\{b_n\}$ は初項 1、公比 -6 の等比数列で

$$b_n = (-6)^{n-1}, \quad a_n = n^2 2^{(-6)^{n-1}}. \quad (1)$$

(3) $1 \leq k \leq n$ では $\log_2 k \leq \log_2 n$ だから

$$0 \leq \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 k \leq \frac{n \log_2 n}{6^{2n}}.$$

右辺は問題文で与えられた極限により 0 へ収束する。はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2 k = 0.$$

(4) (1) から

$$\log_2 a_{2k} = 2 \log_2(2k) + (-6)^{2k-1} = 2 \log_2(2k) - 6^{2k-1}.$$

よって求める式は

$$\frac{2}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n \log_2(2k) - \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^n 6^{2k-1}. \quad (2)$$

第 1 項について

$$\sum_{k=1}^n \log_2(2k) = n + \sum_{k=1}^n \log_2 k$$

であり、(3) と $n/6^{2n} \rightarrow 0$ から極限は 0 である。

第 2 項は等比数列の和より

$$\sum_{k=1}^n 6^{2k-1} = 6 \sum_{j=0}^{n-1} 36^j = \frac{6(36^n - 1)}{35}.$$

したがって (2) の極限は

$$0 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(36^n - 1)}{35 \cdot 36^n} = -\frac{6}{35}.$$

【総評】 目安時間は 16～20 分。標準解法は各設問を順に処理し、別解は b_n から $a_n = n^2 2^{(-6)^{n-1}}$ を先に確定した。偶数番目では $(-6)^{2k-1}$ が負になる符号に注意する。対数中は 36^n に比べて無視でき、等比和だけが極限へ残る構造を明示すると答案が見通しよくなる。

【第 5 問】

関数 $f(x) = \log \frac{3x+3}{x^2+3}$ について、次の問いに答えよ。(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、グラフの凹凸は調べなくてよい。(2) s を定数とすると、次の x についての方程式 (*) の異なる実数解の個数を調べよ。
(*) $f(x) = s$ (3) 定積分

$$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3} dx$$

の値を求めよ。(4) (2) の (*) が実数解をもつ s に対して、(2) の (*) の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする。ただし、(2) の (*) の実数解が一つだけであるときには $g(s) = 0$ とする。関数 $f(x)$ の最大値を α とおくと、定積分

$$\int_0^\alpha g(s) ds$$

の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず定義域と増減を調べる。 $0 \leq s \leq \alpha$ での $g(s)$ は、水平線 $y = s$ がグラフの正の部分切る横幅なので、

$$\int_0^\alpha g(s) ds$$

を

$$\int_0^3 f(x) dx$$

として計算する。

【解答】

(1) 定義域は $x > -1$ である。

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+3} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2+3)}$$

である。したがって $f(x)$ は $-1 < x < 1$ で増加し、 $x > 1$ で減少する。また

$$f(0) = 0, \quad f(3) = 0, \quad f(1) = \log \frac{3}{2}$$

であり、

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

である。よってグラフは $x = 1$ で最大値 $\log \frac{3}{2}$ をとり、 $(0, 0)$ 、 $(3, 0)$ を通る形である。

(2)

$$\alpha = \log \frac{3}{2}$$

とおく。(1) の増減より, 方程式 $f(x) = s$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (s > \alpha), \\ 1 & (s = \alpha), \\ 2 & (s < \alpha) \end{cases}$$

である。

(3)

$$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2 + 3} dx = \int_0^3 \left(2 - \frac{6}{x^2 + 3} \right) dx$$

である。 $x = \sqrt{3} \tan \theta$ とおくと, $x = 0$ のとき $\theta = 0$, $x = 3$ のとき $\theta = \frac{\pi}{3}$ であり,

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

である。したがって

$$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2 + 3} dx = 6 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

である。

(4) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき, $g(s)$ はグラフ $y = f(x)$ のうち $0 \leq x \leq 3$, $y \geq 0$ の部分を水平線で切った長さである。したがって

$$\int_0^\alpha g(s) ds = \int_0^3 f(x) dx$$

である。ここで

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \log(3x + 3) dx - \int_0^3 \log(x^2 + 3) dx$$

である。まず

$$\int_0^3 \log(3x + 3) dx = 3 \log 3 + 4 \log 4 - 3$$

である。また, 部分積分により

$$\int_0^3 \log(x^2 + 3) dx = 3 \log 12 - \int_0^3 \frac{2x^2}{x^2 + 3} dx$$

であるから, (3) を用いて

$$\int_0^3 \log(x^2 + 3) dx = 3 \log 12 - 6 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

である。よって

$$\int_0^\alpha g(s) ds = 3 + 2 \log 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

である。

▶ 解法 2 (2 解の幅を判別式で表して直接積分する方法)

【方針】

$r = e^s$ において方程式 $f(x) = s$ を x の 2 次方程式に直す。2 実根の差は「判別式の平方根 $\div$ 2 次係数」なので $g(s)$ を明示できる。最後は $r - \frac{1}{2} = \cos \theta$ と置換して直接積分する。

【解答】

(1) 定義域は $x > -1$ である。また

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+3} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2+3)}.$$

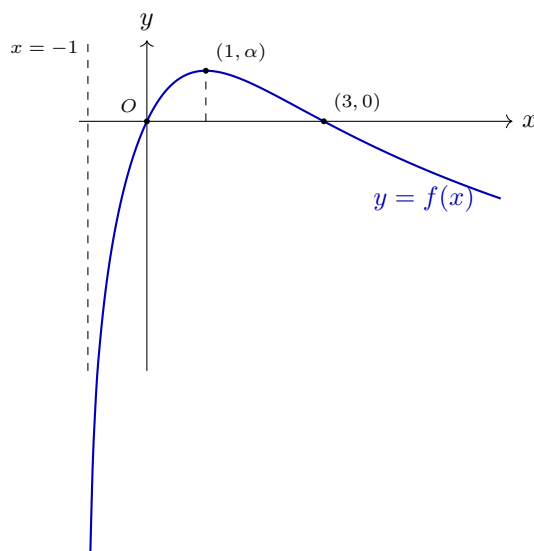
したがって f は $-1 < x < 1$ で増加し、 $x > 1$ で減少する。

$$\begin{aligned} f(0) = f(3) = 0, \quad f(1) = \log \frac{3}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

よって最大値は

$$\alpha = \log \frac{3}{2}$$

であり、グラフの概形は次の通りである。



(2) $r = e^s > 0$ とおくと $f(x) = s$ は

$$\frac{3x+3}{x^2+3} = r, \quad rx^2 - 3x + 3r - 3 = 0 \tag{1}$$

と同値である。この 2 次方程式の判別式は

$$\Delta = 9 + 12r - 12r^2 = 12 \left\{ 1 - \left(r - \frac{1}{2} \right)^2 \right\}.$$

$r > 0$ のもとで Δ の符号を調べると、

s	$s < \alpha$	$s = \alpha$	$s > \alpha$
異なる実数解の個数	2	1	0

となる。なお (1) の実根は元の定義域 $x > -1$ に含まれる。実際、元の関数の増減からも各枝に 1 個ずつ対応する。

(3)

$$\frac{2x^2}{x^2+3} = 2 - \frac{6}{x^2+3}.$$

$x = \sqrt{3} \tan \theta$ とおけば、 $x = 0, 3$ は $\theta = 0, \pi/3$ に対応するから

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

したがって

$$\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3} dx = 6 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(4) $0 \leq s < \alpha$ では (1) の 2 実根の差が $g(s)$ である。 $r = e^s$ と判別式を用いて

$$g(s) = \frac{\sqrt{\Delta}}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{r} \sqrt{1 - \left(r - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

また $ds = dr/r$ だから

$$\int_0^\alpha g(s) ds = 2\sqrt{3} \int_1^{3/2} \frac{\sqrt{1 - (r - \frac{1}{2})^2}}{r^2} dr.$$

$r - \frac{1}{2} = \cos \theta$ とおくと、 $r = 1, 3/2$ はそれぞれ $\theta = \pi/3, 0$ に対応する。よって

$$\int_0^\alpha g(s) ds = 2\sqrt{3} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 \theta}{(\cos \theta + \frac{1}{2})^2} d\theta. \quad (2)$$

ここで

$$\frac{\sin^2 \theta}{(\cos \theta + \frac{1}{2})^2} = \frac{3}{4(\cos \theta + \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{\cos \theta + \frac{1}{2}} - 1. \quad (3)$$

半角置換 $u = \tan(\theta/2)$ により

$$J_1 := \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos \theta + \frac{1}{2}} = \frac{2 \log 2}{\sqrt{3}},$$

$$J_2 := \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{(\cos \theta + \frac{1}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4 \log 2}{3\sqrt{3}}.$$

(2),(3) へ代入すると

$$\int_0^\alpha g(s) ds = 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{4} J_2 + J_1 - \frac{\pi}{3} \right) = 3 + 2 \log 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

【総評】 目安時間は 25～30 分。標準解法は水平切片の長さの積分をグラフ下の面積へ読み替え、別解は 2 次方程式の根の差 $g(s) = \sqrt{\Delta}/e^s$ を直接積分した。最大点は $x = 1$ であり $\sqrt{3}$ ではない。置換後の積分では $ds = dr/r$ の因子を落とさず、端点 $s = \alpha$ では $g(\alpha) = 0$ になることも確認する。