

広島大学 2024 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

A, B, C, D, E の 5 人が、それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った。ゲーム α の得点を x 、ゲーム β の得点を y で表す。次の表はそれぞれのゲームにおける得点である。ただし、 a, b は整数である。なお、得点が負になることもあり得る。

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点の平均値は 7 であるとし、ゲーム β の得点 y の平均値を m とする。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) p, q は実数で、 $p \neq 0$ とする。ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し、新たな変量 z を作成する。 z の分散を s_z^2 、二つの変量 x, z の共分散を s_{xz} とする。このとき、 s_z^2 と s_{xz} を p, q, m のうちの必要なものを用いて表せ。ただし、変量 x と z との共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である。

(3) 変量 x と (2) で作った変量の相関係数が $\frac{3}{4}$ であるとき、 m と b の値を求めよ。また、 p が正であるか負であるかを答えよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

平均から欠けた得点を確定し、偏差を表にして分散・共分散を計算する。一次変換では、定数項は偏差から消え、分散は係数の 2 乗倍、共分散は係数倍になることを用いる。最後は相関係数の絶対値から平均を、符号から係数の符号を決める。

【解答】

(1) x の平均値が 7 であるから

$$\frac{7 + 6 + 8 + a + 4}{5} = 7$$

である。よって

$$a = 10$$

である。

(2) y の平均値が m であるから

$$\frac{0 - 4 - 1 + 2 + b}{5} = m$$

より

$$b = 5m + 3$$

である。 y の分散は

$$s_y^2 = \frac{0^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + b^2}{5} - m^2 = 4m^2 + 6m + 6$$

である。 $z = py + q$ であるから

$$s_z^2 = p^2 s_y^2 = p^2 (4m^2 + 6m + 6)$$

である。

また、 x の偏差は $0, -1, 1, 3, -3$ である。したがって

$$s_{xy} = \frac{0 \cdot 0 + (-1)(-4) + 1(-1) + 3 \cdot 2 + (-3)b}{5} = -3m$$

である。 z の偏差は p 倍されるので

$$s_{xz} = p s_{xy} = -3pm$$

である。

(3) x の分散は

$$s_x^2 = \frac{0^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + (-3)^2}{5} = 4$$

である。相関係数が $\frac{3}{4}$ であるから

$$\frac{-3pm}{2|p|\sqrt{4m^2 + 6m + 6}} = \frac{3}{4}$$

である。大きさを比べると

$$\frac{3|m|}{2\sqrt{4m^2 + 6m + 6}} = \frac{3}{4}$$

であり、これより

$$2|m| = \sqrt{4m^2 + 6m + 6}$$

となる。両辺を平方して

$$4m^2 = 4m^2 + 6m + 6$$

であるから

$$m = -1$$

である。よって

$$b = 5m + 3 = -2$$

である。このとき相関係数は $\frac{3}{4}$ に p の符号を掛けたものになるので、 p は正である。

▶ 解法 2 (偏差ベクトルで一括計算)

【方針】

5 人分の偏差をベクトルとみなし、分散を長さの 2 乗、共分散を内積として処理する。一次変換後の偏差ベクトルが単に p 倍になることから、 q が消える理由と p の符号の役割を同時に明らかにする。

【解答】

(1) x の合計は $5 \cdot 7 = 35$ なので

$$7 + 6 + 8 + a + 4 = 35$$

より

$$a = 10.$$

(2) y の合計は $5m$ であるから

$$b - 3 = 5m, \quad b = 5m + 3.$$

x の偏差ベクトルと y の偏差ベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{X} = (0, -1, 1, 3, -3),$$

$$\mathbf{Y} = (-m, -4 - m, -1 - m, 2 - m, b - m)$$

とする。 $z = py + q$ の平均は $pm + q$ なので、 z の偏差ベクトルは

$$\mathbf{Z} = p\mathbf{Y}$$

である。したがって q は分散・共分散に影響せず、

$$s_z^2 = \frac{1}{5} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} = p^2 \frac{1}{5} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}, \quad s_{xz} = \frac{1}{5} \mathbf{X} \cdot \mathbf{Z} = p \frac{1}{5} \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$$

となる。

ここで、分散は「2 乗の平均 - 平均の 2 乗」から

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{0^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + b^2}{5} - m^2 \\ &= \frac{21 + (5m + 3)^2}{5} - m^2 \\ &= 4m^2 + 6m + 6. \end{aligned}$$

また、 $\mathbf{X}$ の成分の和は 0 なので、 y から平均 m を引く部分は内積で消える。よって

$$\begin{aligned}s_{xy} &= \frac{1}{5}\{0 \cdot 0 + (-1)(-4) + 1(-1) + 3 \cdot 2 + (-3)b\} \\ &= \frac{9 - 3(5m + 3)}{5} = -3m.\end{aligned}$$

以上から

$$s_z^2 = p^2(4m^2 + 6m + 6), \quad s_{xz} = -3pm$$

を得る。

(3)

$$s_x^2 = \frac{1}{5}\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \frac{20}{5} = 4$$

である。相関係数の絶対値が $3/4$ なので

$$\frac{3|m|}{2\sqrt{4m^2 + 6m + 6}} = \frac{3}{4}.$$

両辺は非負であるから平方してよく、

$$4m^2 = 4m^2 + 6m + 6$$

より

$$m = -1, \quad b = 5m + 3 = -2.$$

このとき

$$s_y^2 = 4, \quad s_{xy} = 3$$

なので、 x と z の相関係数は

$$\frac{3p}{2 \cdot 2|p|} = \frac{3}{4} \frac{p}{|p|}.$$

これが $3/4$ であるための必要十分条件は $p > 0$ である。したがって

$$m = -1, \quad b = -2, \quad p > 0.$$

【総評】 難度 4、計算量 4、想定 15 分。一次変換後の偏差が p 倍になるため、 q は分散・共分散から消える。標準偏差は $|p|$ 倍であり、最後の符号判定までが設問である。解法 1 の成分計算と解法 2 の偏差ベクトルの内積が一致し、 $m = -1, b = -2, p > 0$ を相互確認した。

【第 2 問】

実数 t および $0 < a < b$ を満たす実数 a, b に対し、

$$f(t) = \int_a^b (x - at)(x - bt) dx$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ を a と b を用いて表せ。
- (2) $14f(1) + f(0) = 0$ が成り立つとする。このとき、 $\frac{b}{a}$ の値を求めよ。
- (3) $14f(1) + f(0) = 0$ が成り立つとする。 t の関数 $y = f(t) - f(0)$ の最小値が -6 となるときの、 a の値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

積分を展開して $f(0), f(1)$ を求め、条件式を $(b - a)$ で整理する。比 $r = b/a$ に直して $r > 1$ の根を選び、 $b = 2a$ のもとで t の二次関数を平方完成する。

【解答】

(1)

$$f(0) = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{(b - a)(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

である。

(2)

$$f(1) = \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

である。したがって

$$14f(1) + f(0) = 0$$

は

$$-\frac{7(b-a)^3}{3} + \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} = 0$$

と同値である。 $b > a$ より $b-a > 0$ なので

$$a^2 + ab + b^2 = 7(b-a)^2$$

である。 $r = \frac{b}{a}$ とおくと

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

となる。 $r > 1$ より

$$\frac{b}{a} = 2$$

である。

(3) (2) より $b = 2a$ である。一般に

$$f(t) - f(0) = -\frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2}t + ab(b-a)t^2$$

であるから、 $b = 2a$ を代入して

$$f(t) - f(0) = a^3 \left(2t^2 - \frac{9}{2}t \right)$$

である。この二次関数の最小値は

$$-\frac{81}{32}a^3$$

である。これが -6 に等しいので

$$a^3 = \frac{64}{27}$$

となり、

$$a = \frac{4}{3}$$

である。

▶ 解法 2 (区間の標準化)

【方針】

$d = b - a > 0$ とおき、 $x = a + du$ で積分区間を $0 \leq u \leq 1$ へ標準化する。端点からの距離の積を使って $f(1)$ を即座に出し、(3) では $b = 2a$ を最初から代入して無次元化した積分を計算する。

【解答】

$d = b - a > 0$ とおき

$$x = a + du \quad (0 \leq u \leq 1)$$

と置換する。

(1) $t = 0$ では直接

$$f(0) = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3}.$$

(2) $t = 1$ のとき

$$x - a = du, \quad x - b = d(u - 1), \quad dx = d du$$

だから

$$\begin{aligned} f(1) &= d^3 \int_0^1 u(u-1) du \\ &= -\frac{d^3}{6}. \end{aligned}$$

条件 $14f(1) + f(0) = 0$ から

$$-\frac{7d^3}{3} + \frac{d(a^2 + ab + b^2)}{3} = 0.$$

$d > 0$ で割り、 $r = b/a > 1$ とおくと

$$1 + r + r^2 = 7(r-1)^2.$$

すなわち

$$2r^2 - 5r + 2 = (2r-1)(r-2) = 0.$$

$r > 1$ より

$$\frac{b}{a} = 2.$$

(3) $b = 2a$ なので、 $x = au$ ($1 \leq u \leq 2$) と置くと

$$\begin{aligned} f(t) &= a^3 \int_1^2 (u-t)(u-2t) du \\ &= a^3 \int_1^2 \{u^2 - 3tu + 2t^2\} du \\ &= a^3 \left(\frac{7}{3} - \frac{9}{2}t + 2t^2 \right). \end{aligned}$$

$f(0) = 7a^3/3$ なので

$$y = f(t) - f(0) = a^3 \left(2t^2 - \frac{9}{2}t \right).$$

平方完成すると

$$y = 2a^3 \left(t - \frac{9}{8} \right)^2 - \frac{81}{32}a^3.$$

最小値が -6 であるから

$$-\frac{81}{32}a^3 = -6, \quad a^3 = \frac{64}{27}.$$

$a > 0$ より

$$a = \frac{4}{3}.$$

このとき頂点は $t = 9/8$ で、実際に最小値をとる。

【総評】 難度 4、計算量 4、想定 12 分。 $f(1)$ では $x-a$ と $x-b$ が区間の両端からの距離になる。比 $r = b/a$ を用いると尺度 a が消え、 $r = 1/2, 2$ のうち $b > a$ から 2 を選ぶ。展開による解法と区間標準化の解法で $b/a = 2$ 、最小値 $-81a^3/32$ 、 $a = 4/3$ が一致する。

【第 2 問】

座標空間内の 4 点 $O(0,0,0)$ 、 $A(1,1,0)$ 、 $B(0,1,1)$ 、 $C(1,2,-1)$ に対し、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ。

(2) 点 O, A, B を通る平面を α とする。点 C から平面 α に下ろした垂線と平面 α の交点を M とする。点 M の座標を求めよ。

(3) 点 M を (2) で定めた点とする。点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$$

となるものとする。ただし、点 D は点 C とは異なる点である。このとき、点 D の座標を求めよ。

(4) 点 D を (3) で定めた点とする。三角形 CAD の面積 S を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

垂線の足 M を平面 OAB の 2 本の基底ベクトルで表し、 CM との直交条件から係数を決める。 D は直線 CM 上で距離条件を満たす点として求め、底辺 CD と高さ AM で面積を計算する。

【解答】

(1)

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 1), \quad \vec{c} = (1, 2, -1)$$

である。したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 3, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 1$$

である。

(2) M は平面 α 上にあるから

$$\overrightarrow{OM} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

とおける。すなわち

$$M = (s, s+t, t)$$

である。 $\overrightarrow{CM}$ は平面 α に垂直であるから、 $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{a} = 0$ 、 $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{b} = 0$ である。これより

$$2s + t = 3, \quad s + 2t = 1$$

を得る。したがって

$$s = \frac{5}{3}, \quad t = -\frac{1}{3}$$

であり、

$$M = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

である。

(3) D は直線 CM 上にあるから

$$D = M + \lambda(C - M)$$

とおく。 $C - M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$ であるから、

$$D - A = \left(\frac{2-2\lambda}{3}, \frac{1+2\lambda}{3}, \frac{-1-2\lambda}{3} \right)$$

である。 $|AC|^2 = 2$ であり、条件 $|AD|^2 = 2$ は

$$\frac{(2-2\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2 + (-1-2\lambda)^2}{9} = 2$$

である。これを整理すると $\lambda^2 = 1$ となる。 $\lambda = 1$ は点 C を表すので、 $D \neq C$ より $\lambda = -1$ である。したがって

$$D = 2M - C = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

である。

(4) 直線 CM は平面 α に垂直であり、点 A, M は平面 α 上にあるから、 AM は直線 CD への高さである。ここで

$$CM = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad CD = 2CM = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

であり、

$$AM = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。よって

$$S = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AM = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。

▶ 解法 2 (平面の方程式と鏡映)

【方針】

平面 OAB の法線ベクトルを直接求め、平面の方程式から C の正射影 M を得る。 A が平面上にあることを利用すると、 C と平面对称な点が距離条件を満たすもう一つの点 D である。最後は外積で面積を独立に検算する。

【解答】

(1)

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 1), \quad \vec{c} = (1, 2, -1)$$

より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 3, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 1.$$

(2) 平面 α の法線ベクトルとして

$$\mathbf{n} = (1, -1, 1)$$

をとれる。実際、 $\mathbf{n} \cdot \vec{a} = \mathbf{n} \cdot \vec{b} = 0$ である。平面は原点を通るので、その方程式は

$$x - y + z = 0.$$

$C = (1, 2, -1)$ における左辺の値は -2 、また $|\mathbf{n}|^2 = 3$ である。したがって C から平面への正射影は

$$\begin{aligned} M &= C - \frac{\mathbf{n} \cdot C}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \\ &= (1, 2, -1) + \frac{2}{3}(1, -1, 1) \\ &= \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

(3) A は平面 α 上にあり、 $CM \perp \alpha$ である。そこで C を平面 α に関して対称移動した点

$$D = 2M - C = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

を考える。平面对称は平面上の点 A からの距離を保つので

$$|AD| = |AC|.$$

また C, M, D は一直線上にあり、 $D \neq C$ であるから、これは条件を満たす求める点である。よって

$$D = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

(4) 外積で独立に面積を求める。

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{AD} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

したがって

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \left(0, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right)$$

であり、その大きさは $4\sqrt{2}/3$ である。よって

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5、想定 18 分。垂線の足は平面内の一次結合でも、法線ベクトルと平面方程式でも求められる。 D が C の平面对称点であることを見抜くと距離条件を一行で処理できる。底辺と高さ、および外積の 2 通りで面積 $2\sqrt{2}/3$ を確認した。

【第 4 問】

a と r を正の実数とする。座標平面上の放物線 $y = x^2$ と、中心 $(0, a)$ 、半径 r の円 C を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a = r$ とする。このとき、放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点が一つのみになるような r の値の範囲を求めよ。

(2) 円 C が不等式 $y > 0$ の表す領域に含まれるための必要十分条件を a と r を用いて表せ。

(3) a と r は (2) で求めた条件を満たすとする。このとき、放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点がちょうど二つになるような (r, a) の範囲を ra 平面に図示せよ。

(4) 正の実数 s に対し、中心 $(0, a + r + s)$ 、半径 s の円を C' とする。円 C と円 C' は次の条件 (i) と (ii) を満たすとする。

(i) 円 C は不等式 $y > 0$ の表す領域に含まれ、さらに放物線 $y = x^2$ と円 C との共有点はちょうど二つである。

(ii) 放物線 $y = x^2$ と円 C' との共有点はちょうど二つである。

このとき、 s を r を用いて表せ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

$u = x^2 \geq 0$ へ置換し、共有点数を u の二次方程式の非負解の個数へ翻訳する。円が上半平面に含まれる条件のもとでは、ちょうど 2 共有点は正の重解に対応する。

【解答】

(1) 放物線上の点を (x, x^2) とすると、円との共有点は

$$x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$$

を満たす。 $u = x^2$ とおくと

$$u(u + 1 - 2r) = 0$$

である。 $u = 0$ は点 $(0, 0)$ を与える。もう一つの解 $u = 2r - 1$ が正なら共有点はさらに 2 個増える。したがって共有点が一つのみである条件は

$$2r - 1 \leq 0$$

であり、

$$0 < r \leq \frac{1}{2}$$

である。

(2) 円 C の最下点の y 座標は $a - r$ である。円全体が $y > 0$ の表す領域に含まれるための必要十分条件は

$$a - r > 0$$

すなわち

$$a > r$$

である。

(3) 放物線と円 C の共有点は

$$u^2 + (1 - 2a)u + a^2 - r^2 = 0 \quad (u = x^2 \geq 0)$$

で判定できる。(2) より $a > r$ なので、定数項 $a^2 - r^2$ は正であり、 $u = 0$ は解でない。共有点がちょうど二つであるためには、この二次方程式が正の重解をもてばよい。

判別式が 0 である条件は

$$(1 - 2a)^2 - 4(a^2 - r^2) = 0$$

すなわち

$$a = r^2 + \frac{1}{4}$$

である。このとき重解は

$$u = a - \frac{1}{2} = r^2 - \frac{1}{4}$$

であるから、正であるために $r > \frac{1}{2}$ が必要である。逆に $r > \frac{1}{2}$ 、 $a = r^2 + \frac{1}{4}$ なら $a - r = (r - \frac{1}{2})^2 > 0$ であり条件を満たす。したがって図示すべき範囲は

$$a = r^2 + \frac{1}{4}, \quad r > \frac{1}{2}$$

で表される放物線上の部分である。

(4) (i) より

$$a = r^2 + \frac{1}{4}, \quad r > \frac{1}{2}$$

である。円 C' の中心の y 座標を $a' = a + r + s$ とおく。円 C' が放物線とちょうど二つの共有点をもつためには、(3) と同じ判定により

$$a' = s^2 + \frac{1}{4}$$

である。したがって

$$a + r + s = s^2 + \frac{1}{4}$$

である。ここに $a = r^2 + \frac{1}{4}$ を代入すると

$$r^2 + r + s = s^2$$

となり、

$$(s - r)(s + r) = s + r$$

である。 $s + r > 0$ より

$$s = r + 1$$

である。

▶ 解法 2 (接線と半径の直交)

【方針】

ちょうど 2 つの共有点は左右対称な 2 点での接触であることを用いる。接点 (t, t^2) における放物線の接線方向 $(1, 2t)$ と円の半径方向 $(t, t^2 - a)$ の直交条件から a, r の関係を直接導く。

【解答】

(1) $a = r$ のとき円は原点を通る。放物線上の点 (x, x^2) が円上にもある条件は

$$x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2,$$

すなわち

$$x^2(x^2 + 1 - 2r) = 0.$$

$x = 0$ 以外の共有点が生じない条件は $2r - 1 \leq 0$ である。 $r > 0$ と合わせて

$$0 < r \leq \frac{1}{2}.$$

(2) 円 C の最下点の y 座標は $a - r$ である。円周も内部もすべて $y > 0$ に含まれるための必要十分条件は

$$a > r.$$

(3) 条件 $a > r$ のもとでは円は x 軸より上にあり、共有点は x 座標が正負で対になって現れる。共有点がちょうど 2 つなら、右側の共有点 (t, t^2) ($t > 0$) で円と放物線は接する。

放物線の接線方向ベクトルは

$$(1, 2t),$$

円の中心 $(0, a)$ から接点へ向かう半径ベクトルは

$$(t, t^2 - a)$$

である。接線と半径は直交するから

$$(1, 2t) \cdot (t, t^2 - a) = 0.$$

$t > 0$ より

$$1 + 2(t^2 - a) = 0, \quad a = t^2 + \frac{1}{2}. \quad (1)$$

また半径について

$$\begin{aligned} r^2 &= t^2 + (t^2 - a)^2 \\ &= t^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

したがって

$$a = r^2 + \frac{1}{4}, \quad t^2 = r^2 - \frac{1}{4} > 0.$$

よって必要条件は

$$r > \frac{1}{2}, \quad a = r^2 + \frac{1}{4}. \quad (2)$$

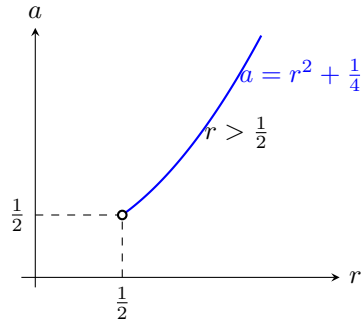
逆に (2) なら $t = \sqrt{r^2 - 1/4} > 0$ とおけ、 $(\pm t, t^2)$ で接する。また

$$a - r = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$$

で (2) の上半平面条件も満たす。したがって ra 平面では

$$a = r^2 + \frac{1}{4} \quad \left(r > \frac{1}{2}\right)$$

で表される曲線部分である。端点 $(1/2, 1/2)$ は含まない。



(4) 円 C には (3) を適用できるので

$$a = r^2 + \frac{1}{4}. \quad (3)$$

円 C' の中心の高さを $a' = a + r + s$ とする。条件 (ii) の 2 共有点も左右対称な接点であり、同じ接線・半径の議論から

$$a' = s^2 + \frac{1}{4}. \quad (4)$$

(3),(4) より

$$r^2 + \frac{1}{4} + r + s = s^2 + \frac{1}{4},$$

すなわち

$$(s - r)(s + r) = s + r.$$

$s + r > 0$ で割って

$$s = r + 1.$$

この値は $s > 1/2$ も自動的に満たすため、 C' の 2 つの接点も実在する。

【総評】 難度 7、計算量 6、想定 22 分。代数解法では $u = x^2$ の正の重解、幾何解法では接線方向と半径方向の直交が中心である。どちらからも $a = r^2 + 1/4, r > 1/2$ を得る。端点 $(1/2, 1/2)$ は円が $y > 0$ に含まれず除外される。(4) は同じ接触条件を 2 つの円へ適用し、 $s = r + 1$ を確認した。