

広島大学 2024 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

A, B, C, D, E の 5 人が、それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った。ゲーム α の得点を x 、ゲーム β の得点を y で表す。次の表はそれぞれのゲームにおける得点である。ただし、 a, b は整数である。なお、得点が負になることもあり得る。

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点の平均値は 7 であるとし、ゲーム β の得点 y の平均値を m とする。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) p, q は実数で、 $p \neq 0$ とする。ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し、新たな変量 z を作成する。 z の分散を s_z^2 、二つの変量 x, z の共分散を s_{xz} とする。このとき、 s_z^2 と s_{xz} を p, q, m のうちの必要なものを用いて表せ。ただし、変量 x と z との共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である。

(3) 変量 x と (2) で作った変量の相関係数が $\frac{3}{4}$ であるとき、 m と b の値を求めよ。また、 p が正であるか負であるかを答えよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

平均から欠けた得点を確定し、偏差を表にして分散・共分散を計算する。一次変換では、定数項は偏差から消え、分散は係数の 2 乗倍、共分散は係数倍になることを用いる。最後は相関係数の絶対値から平均を、符号から係数の符号を決める。

【解答】

(1) x の平均値が 7 であるから

$$\frac{7 + 6 + 8 + a + 4}{5} = 7$$

である。よって

$$a = 10$$

である。

(2) y の平均値が m であるから

$$\frac{0 - 4 - 1 + 2 + b}{5} = m$$

より

$$b = 5m + 3$$

である。 y の分散は

$$s_y^2 = \frac{0^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + b^2}{5} - m^2 = 4m^2 + 6m + 6$$

である。 $z = py + q$ であるから

$$s_z^2 = p^2 s_y^2 = p^2 (4m^2 + 6m + 6)$$

である。

また、 x の偏差は $0, -1, 1, 3, -3$ である。したがって

$$s_{xy} = \frac{0 \cdot 0 + (-1)(-4) + 1(-1) + 3 \cdot 2 + (-3)b}{5} = -3m$$

である。 z の偏差は p 倍されるので

$$s_{xz} = p s_{xy} = -3pm$$

である。

(3) x の分散は

$$s_x^2 = \frac{0^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + (-3)^2}{5} = 4$$

である。相関係数が $\frac{3}{4}$ であるから

$$\frac{-3pm}{2|p|\sqrt{4m^2 + 6m + 6}} = \frac{3}{4}$$

である。大きさを比べると

$$\frac{3|m|}{2\sqrt{4m^2 + 6m + 6}} = \frac{3}{4}$$

であり、これより

$$2|m| = \sqrt{4m^2 + 6m + 6}$$

となる。両辺を平方して

$$4m^2 = 4m^2 + 6m + 6$$

であるから

$$m = -1$$

である。よって

$$b = 5m + 3 = -2$$

である。このとき相関係数は $\frac{3}{4}$ に p の符号を掛けたものになるので、 p は正である。

▶ 解法 2 (偏差ベクトルで一括計算)

【方針】

5 人分の偏差をベクトルとみなし、分散を長さの 2 乗、共分散を内積として処理する。一次変換後の偏差ベクトルが単に p 倍になることから、 q が消える理由と p の符号の役割を同時に明らかにする。

【解答】

(1) x の合計は $5 \cdot 7 = 35$ なので

$$7 + 6 + 8 + a + 4 = 35$$

より

$$a = 10.$$

(2) y の合計は $5m$ であるから

$$b - 3 = 5m, \quad b = 5m + 3.$$

x の偏差ベクトルと y の偏差ベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{X} = (0, -1, 1, 3, -3),$$

$$\mathbf{Y} = (-m, -4 - m, -1 - m, 2 - m, b - m)$$

とする。 $z = py + q$ の平均は $pm + q$ なので、 z の偏差ベクトルは

$$\mathbf{Z} = p\mathbf{Y}$$

である。したがって q は分散・共分散に影響せず、

$$s_z^2 = \frac{1}{5} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} = p^2 \frac{1}{5} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}, \quad s_{xz} = \frac{1}{5} \mathbf{X} \cdot \mathbf{Z} = p \frac{1}{5} \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$$

となる。

ここで、分散は「2 乗の平均 - 平均の 2 乗」から

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{0^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 2^2 + b^2}{5} - m^2 \\ &= \frac{21 + (5m + 3)^2}{5} - m^2 \\ &= 4m^2 + 6m + 6. \end{aligned}$$

また、 $\mathbf{X}$ の成分の和は 0 なので、 y から平均 m を引く部分は内積で消える。よって

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{5} \{0 \cdot 0 + (-1)(-4) + 1(-1) + 3 \cdot 2 + (-3)b\} \\ &= \frac{9 - 3(5m + 3)}{5} = -3m. \end{aligned}$$

以上から

$$s_z^2 = p^2(4m^2 + 6m + 6), \quad s_{xz} = -3pm$$

を得る。

(3)

$$s_x^2 = \frac{1}{5} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \frac{20}{5} = 4$$

である。相関係数の絶対値が $3/4$ なので

$$\frac{3|m|}{2\sqrt{4m^2 + 6m + 6}} = \frac{3}{4}.$$

両辺は非負であるから平方してよく、

$$4m^2 = 4m^2 + 6m + 6$$

より

$$m = -1, \quad b = 5m + 3 = -2.$$

このとき

$$s_y^2 = 4, \quad s_{xy} = 3$$

なので、 x と z の相関係数は

$$\frac{3p}{2 \cdot 2|p|} = \frac{3}{4} \frac{p}{|p|}.$$

これが $3/4$ であるための必要十分条件は $p > 0$ である。したがって

$$m = -1, \quad b = -2, \quad p > 0.$$

【総評】 難度 4、計算量 4、想定 15 分。一次変換後の偏差が p 倍になるため、 q は分散・共分散から消える。標準偏差は $|p|$ 倍であり、最後の符号判定までが設問である。解法 1 の成分計算と解法 2 の偏差ベクトルの内積が一致し、 $m = -1, b = -2, p > 0$ を相互確認した。

【第 2 問】

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(1, 1, 0)$ 、 $B(0, 1, 1)$ 、 $C(1, 2, -1)$ に対し、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ。

(2) 点 O, A, B を通る平面を α とする。点 C から平面 α に下ろした垂線と平面 α の交点を M とする。点 M の座標を求めよ。

(3) 点 M を (2) で定めた点とする。点 D を直線 CM 上の点であって

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$$

となるものとする。ただし、点 D は点 C とは異なる点である。このとき、点 D の座標を求めよ。

(4) 点 D を (3) で定めた点とする。三角形 CAD の面積 S を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

垂線の足 M を平面 OAB の 2 本の基底ベクトルで表し、 CM との直交条件から係数を決める。 D は直線 CM 上で距離条件を満たす点として求め、底辺 CD と高さ AM で面積を計算する。

【解答】

(1)

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 1), \quad \vec{c} = (1, 2, -1)$$

である。したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 3, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 1$$

である。

(2) M は平面 α 上にあるから

$$\overrightarrow{OM} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

とおける。すなわち

$$M = (s, s+t, t)$$

である。 $\overrightarrow{CM}$ は平面 α に垂直であるから、 $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{a} = 0$ 、 $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{b} = 0$ である。これより

$$2s + t = 3, \quad s + 2t = 1$$

を得る。したがって

$$s = \frac{5}{3}, \quad t = -\frac{1}{3}$$

であり、

$$M = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

である。

(3) D は直線 CM 上にあるから

$$D = M + \lambda(C - M)$$

とおく。 $C - M = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$ であるから、

$$D - A = \left(\frac{2-2\lambda}{3}, \frac{1+2\lambda}{3}, \frac{-1-2\lambda}{3} \right)$$

である。 $|AC|^2 = 2$ であり、条件 $|AD|^2 = 2$ は

$$\frac{(2-2\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2 + (-1-2\lambda)^2}{9} = 2$$

である。これを整理すると $\lambda^2 = 1$ となる。 $\lambda = 1$ は点 C を表すので、 $D \neq C$ より $\lambda = -1$ である。したがって

$$D = 2M - C = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

である。

(4) 直線 CM は平面 α に垂直であり、点 A, M は平面 α 上にあるから、 AM は直線 CD への高さである。ここで

$$CM = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad CD = 2CM = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

であり、

$$AM = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。よって

$$S = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AM = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。

▶ 解法 2 (平面の方程式と鏡映)

【方針】

平面 OAB の法線ベクトルを直接求め、平面の方程式から C の正射影 M を得る。 A が平面上にあることを利用すると、 C と平面对称な点が距離条件を満たすもう一つの点 D である。最後は外積で面積を独立に検算する。

【解答】

(1)

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 1), \quad \vec{c} = (1, 2, -1)$$

より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 3, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 1.$$

(2) 平面 α の法線ベクトルとして

$$\mathbf{n} = (1, -1, 1)$$

をとれる。実際、 $\mathbf{n} \cdot \vec{a} = \mathbf{n} \cdot \vec{b} = 0$ である。平面は原点を通るので、その方程式は

$$x - y + z = 0.$$

$C = (1, 2, -1)$ における左辺の値は -2 、また $|\mathbf{n}|^2 = 3$ である。したがって C から平面への正射影は

$$\begin{aligned} M &= C - \frac{\mathbf{n} \cdot C}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \\ &= (1, 2, -1) + \frac{2}{3} (1, -1, 1) \\ &= \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

(3) A は平面 α 上にあり、 $CM \perp \alpha$ である。そこで C を平面 α に関して対称移動した点

$$D = 2M - C = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

を考える。平面对称は平面上の点 A からの距離を保つので

$$|AD| = |AC|.$$

また C, M, D は一直線上にあり、 $D \neq C$ であるから、これは条件を満たす求める点である。よって

$$D = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

(4) 外積で独立に面積を求める。

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{AD} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

したがって

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \left(0, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right)$$

であり、その大きさは $4\sqrt{2}/3$ である。よって

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5、想定 18 分。垂線の足は平面内の一次結合でも、法線ベクトルと平面方程式でも求められる。 D が C の平面对称点であることを見抜くと距離条件を一行で処理できる。底辺と高さ、および外積の 2 通りで面積 $2\sqrt{2}/3$ を確認した。

【第 3 問】

x 座標、 y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする。座標平面上の 3 点を頂点にもつ三角形上の格子点とは、頂点、辺または内部に含まれている格子点のことをいう。四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする。

$O(0,0)$ を座標平面上の原点とする。 a と b を互いに素な自然数、 n を自然数として、座標平面上の点 $P_n(an,0)$ 、 $Q_n(0,bn)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 P_nQ_n 上の格子点 (x,y) で $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ を満たすものは

$$(ak, b(n-k)) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

のみであることを示せ。

(2) P_1 と Q_1 をそれぞれ P, Q と表す。点 $R(a,b)$ に対し、長方形 $OPRQ$ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。また、三角形 OPQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。

(3) 三角形 OP_nQ_n 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。

(4) 座標空間内の原点 $O(0,0,0)$ と 3 点 $X(an,0,0)$ 、 $Y(0,bn,0)$ 、 $Z(0,0,n)$ をとる。点 O, X, Y, Z を 4 頂点とする四面体 $OXYZ$ 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。ただし、 x 座標、 y 座標、 z 座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする。また、四面体上の格子点とは、頂点、辺、面または内部に含まれている格子点のことをいう。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

斜辺の格子点を互いに素の条件で決定する。三角形内は x 座標を a で割った商と余りに分けて縦に数え、四面体は整数の高さごとの三角形断面の和にする。

【解答】

(1) 直線 P_nQ_n の方程式は

$$bx + ay = abn$$

である。この直線上の格子点 (x,y) について、上式を a で割った余りを見ると、 bx は a で割り切れる。 a と b は互いに素であるから、 x は a で割り切れる。よって $x = ak$ とおける。これを代入すると

$$y = b(n-k)$$

である。 $x \geq 0, y \geq 0$ より $k = 0, 1, \dots, n$ であるから、求める格子点は

$$(ak, b(n-k)) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

のみである。

(2) 長方形 $OPRQ$ 上の格子点は $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ を満たす格子点であるから、個数は

$$(a+1)(b+1)$$

である。

(1) を $n=1$ に適用すると、対角線 PQ 上の格子点は P, Q の 2 個だけである。長方形は対角線 PQ で合同な 2 つの三角形に分かれるので、三角形 OPQ 上の格子点の個数は

$$\frac{(a+1)(b+1)+2}{2} = \frac{ab+a+b+3}{2}$$

である。

(3) 三角形 OP_nQ_n 内の格子点は

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad bx + ay \leq abn$$

を満たす格子点である。 $x = aq + r, 0 \leq r \leq a-1$ と表す。ただし $x = an$ の点は最後に別に数える。

$q = 0, 1, \dots, n-1$ を固定する。 $r = 0$ のとき、 y は 0 から $b(n-q)$ までの $b(n-q) + 1$ 個である。 $r = 1, 2, \dots, a-1$ のとき、 br を a で割った商を用いて同様に数えると、固定した q に対する個数の和は

$$a\{b(n-q) + 1\} - \frac{(a-1)(b+1)}{2}$$

である。ここで、 br の a による余りが $1, 2, \dots, a-1$ を一度ずつ動くことを用いた。

したがって、 $x = 0, 1, \dots, an-1$ に対応する個数を足し、さらに $x = an, y = 0$ の 1 個を加えると

$$\sum_{q=0}^{n-1} \left[a\{b(n-q)+1\} - \frac{(a-1)(b+1)}{2} \right] + 1$$

である。これを整理して

$$\frac{abn^2 + (a+b+1)n + 2}{2}$$

を得る。

(4) $z = m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) で切った断面を考える。この断面上の格子点は、(3) で n を $n-m$ に置き換えた個数だけある。したがって、求める個数は

$$\sum_{k=0}^n \frac{abk^2 + (a+b+1)k + 2}{2}$$

である。よって

$$\frac{abn(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{(a+b+1)n(n+1)}{4} + n + 1$$

である。

▶ 解法 2 (長方形の対称性)

【方針】

斜辺が長方形を合同な 2 つの三角形へ分けることを利用する。長方形全体の格子点数に、両側へ重複して数えられる斜辺上の格子点数を加えて 2 で割ればよい。この方法を一般の n へ直接適用し、最後は高さごとに和をとる。

【解答】

(1) 直線 P_nQ_n は

$$bx + ay = abn$$

で表される。格子点 (x, y) がこの直線上にあれば、 a は bx を割り切る。 a, b は互いに素なので、 a は x を割り切る。よって $x = ak$ と書け、代入すると

$$y = b(n-k)$$

となる。 $x, y \geq 0$ から $0 \leq k \leq n$ であり、 k は整数なので

$$(x, y) = (ak, b(n-k)) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

逆にこれらの点はすべて直線上の格子点であるから、必要十分である。

(2) 長方形 $OPRQ$ 上の格子点数は

$$(a+1)(b+1).$$

対角線 PQ は長方形を合同な 2 つの三角形に分ける。(1) で $n = 1$ とすると、 PQ 上の格子点は P, Q の 2 点だけである。

長方形全体の格子点を 2 つの三角形に振り分けると、対角線上の 2 点だけが両方に数えられる。2 つの三角形の格子点数は等しいから、三角形 OPQ 上の格子点数を N_1 とすれば

$$2N_1 = (a+1)(b+1) + 2.$$

よって

$$N_1 = \frac{ab + a + b + 3}{2}.$$

(3) 三角形 OP_nQ_n を、長方形

$$0 \leq x \leq an, \quad 0 \leq y \leq bn$$

の対角線 P_nQ_n で切り出した半分とみる。長方形の格子点数は

$$(an+1)(bn+1),$$

(1) より対角線上の格子点数は $n + 1$ である。したがって、求める個数 N_n は

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{(an + 1)(bn + 1) + (n + 1)}{2} \\ &= \frac{abn^2 + (a + b + 1)n + 2}{2}. \end{aligned}$$

この議論は境界・内部を含む格子点を漏れなく数え、対角線上だけを重複補正している。

(4) 四面体は

$$\frac{x}{an} + \frac{y}{bn} + \frac{z}{n} \leq 1, \quad x, y, z \geq 0$$

で表される。 $z = m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) で切ると

$$bx + ay \leq ab(n - m)$$

となるので、断面上の格子点数は (3) の N_{n-m} である。 $k = n - m$ と置けば全格子点数は

$$\sum_{k=0}^n N_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \{abk^2 + (a + b + 1)k + 2\}.$$

ここで

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を用いると

$$\frac{abn(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{(a+b+1)n(n+1)}{4} + n + 1.$$

$n = 0$ と形式的に置けば原点の 1 個になり、断面和の端点とも整合する。

【総評】 難度 7、計算量 7、想定 25 分。互いに素であることは斜辺上の格子点を $n + 1$ 個に限定するために使う。解法 1 の剰余別の縦線数え上げに対し、解法 2 は長方形を対角線で二等分し、対角線上の重複だけを補正する。両者から同じ N_n を得た後、高さ別の断面和で四面体へ拡張した。ピックの定理など範囲外の定理は用いていない。

【第 4 問】

複素数平面において、点 1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 α が円 C と虚軸との交点であるとき、 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ を求めよ。
- (2) 円 C 上の点 z に対し、点 $-\frac{1}{z}$ も円 C 上にあることを示せ。
- (3) 円 C 上の点 z に対し、 $w = z + \frac{1}{z}$ とする。複素数 w, z は

$$|w - 2| = \frac{2}{|z|}$$

を満たすことを示せ。

- (4) 円 C 上の点 z に対し、(3) で定めた複素数 w は

$$|w - 2||w + 2| = 4$$

を満たすことを示せ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

円の条件 $|z - 1|^2 = 2$ を展開し、 $|z + 1|^2 = 2|z|^2$ を導く。 $w \pm 2$ を因数分解して絶対値をとり、積を求める。

【解答】

(1) α は虚軸上にあるから $\alpha = yi$ とおける。円 C 上にある条件は

$$|yi - 1|^2 = 2$$

であり、 $1 + y^2 = 2$ より $y = \pm 1$ である。したがって $\alpha = \pm i$ であり、いずれの場合も

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$$

である。

(2) $|z - 1| = \sqrt{2}$ より

$$|z|^2 - z - \bar{z} - 1 = 0$$

である。よって

$$|z + 1|^2 = |z|^2 + z + \bar{z} + 1 = 2|z|^2$$

である。したがって

$$\left| -\frac{1}{z} - 1 \right| = \left| \frac{z + 1}{z} \right| = \sqrt{2}$$

となるので、点 $-\frac{1}{z}$ も円 C 上にある。

(3)

$$w - 2 = z + \frac{1}{z} - 2 = \frac{(z - 1)^2}{z}$$

である。したがって

$$|w - 2| = \frac{|z - 1|^2}{|z|} = \frac{2}{|z|}$$

である。

(4)

$$w + 2 = z + \frac{1}{z} + 2 = \frac{(z + 1)^2}{z}$$

である。(2) の計算より $|z + 1|^2 = 2|z|^2$ であるから

$$|w + 2| = \frac{|z + 1|^2}{|z|} = 2|z|$$

である。よって (3) と合わせて

$$|w - 2||w + 2| = \frac{2}{|z|} \cdot 2|z| = 4$$

である。

▶ 解法 2 (極形式による反転の追跡)

【方針】

$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおき、円の条件を $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 1 = 0$ へ直す。 $-1/z$ の絶対値と偏角を追って同じ円の方程式を満たすことを示し、最後は $w \pm 2$ の積の構造を用いる。

【解答】

円 C は原点を通らないので、以下では $z \neq 0$ である。

(1) 虚軸上では $\alpha = yi$ (y は実数) と書ける。 $|\alpha - 1|^2 = 2$ から

$$y^2 + 1 = 2, \quad y = \pm 1.$$

したがって $\alpha = \pm i$ であり

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

(2) $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($\rho > 0$) とおく。円 C 上にある条件は

$$|z - 1|^2 = 2$$

すなわち

$$\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 1 = 0. \quad (*)$$

一方

$$-\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \{\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)\}.$$

この点に対して円の方程式の左辺を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos(\pi - \theta) - 1 &= \frac{1 + 2\rho \cos \theta - \rho^2}{\rho^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。最後の等号は (*) による。よって

$$-\frac{1}{z} \text{ も円 } C \text{ 上にある.}$$

(3)

$$w - 2 = z + \frac{1}{z} - 2 = \frac{(z - 1)^2}{z}$$

より

$$|w - 2| = \frac{|z - 1|^2}{|z|} = \frac{2}{|z|}.$$

(4) (2) より $-1/z$ も円 C 上にあるから

$$\left| -\frac{1}{z} - 1 \right| = \sqrt{2}.$$

したがって

$$\frac{|z + 1|}{|z|} = \sqrt{2}, \quad |z + 1|^2 = 2|z|^2.$$

また

$$w + 2 = \frac{(z + 1)^2}{z}$$

なので

$$|w + 2| = \frac{|z + 1|^2}{|z|} = 2|z|.$$

(3) と掛け合わせて

$$|w - 2||w + 2| = \frac{2}{|z|} \cdot 2|z| = 4.$$

この積は、 z と $-1/z$ が同じ円上にあるという反転対称性が、 w 平面上の 2 点 ± 2 からの距離の積へ移ったものと解釈できる。

【総評】 難度 4、計算量 4、想定 12 分。代数解法では $|z+1|^2 = 2|z|^2$ 、極形式の解法では $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 1 = 0$ が中心となる。円が原点を通らず $z \neq 0$ であることを最初に確認する。2 解法で反転 $z \mapsto -1/z$ の不変性と距離積 4 を相互確認した。

【第 5 問】

関数

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

に対し、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ は $x > 0$ で上に凸であることを示せ。

(2) すべての $x \geq 0$ に対し、不等式

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x) \leq x$$

が成り立つことを示せ。

(3) 定積分

$$\int_0^{\frac{3}{4}} f(x) dx$$

の値 S を求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ 上の点で、 x 座標が $\frac{3}{4}$ であるものを A とする。また、点 A における曲線 $y = f(x)$ の接線を l とする。 l と直線 $y = x$ の交点を B とする。点 $O(0, 0)$ 、 A, B と点 $C(\frac{3}{4}, 0)$ を頂点にもつ四角形 $ABOC$ の面積 T を求めよ。

(5) (1)~(4) を利用して、 $\log 2$ の小数第 1 位の数字を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

導関数と第 2 次導関数から凸性と基本不等式を示し、部分積分で曲線下の面積 S を求める。接線と $y = x$ の交点から四角形の面積 T を計算し、 $S < T$ と積分下界を組み合わせることで $\log 2$ を挟む。

【解答】

(1)

$$f'(x) = \frac{1 + x/\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f''(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

$x > 0$ では $f''(x) < 0$ であるから、曲線 $y = f(x)$ は上に凸である。

(2) $f(0) = 0$ であり、 $x \geq 0$ で $0 < f'(x) \leq 1$ だから

$$f(x) \leq x.$$

また

$$h(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

とおくと $h(0) = 0$ で、

$$h'(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \geq 0.$$

よって

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x) \leq x \quad (x \geq 0).$$

(3) 部分積分により

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = xf(x) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

ここで

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) = \log 2$$

なので

$$S = \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{4}.$$

(4) $L = \log 2$ とおく。 $A = (3/4, L)$ で、接線 l の傾きは $4/5$ であるから

$$l: y - L = \frac{4}{5} \left(x - \frac{3}{4} \right).$$

$y = x$ との交点は

$$B = (5L - 3, 5L - 3).$$

四角形 $ABOC$ に座標の面積公式を用いると

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{4}(5L - 3) + \frac{3}{4}L - L(5L - 3) \right\} \\ &= -\frac{5}{2}L^2 + \frac{15}{4}L - \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

(5) (2) の左側の不等式を $0 \leq x \leq 3/4$ で積分すると

$$\int_0^{3/4} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq S.$$

左辺は $1/4$ なので、(3) から

$$\frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}L - \frac{1}{4}, \quad L \geq \frac{2}{3}. \quad (1)$$

次に (1) より、上に凸な曲線は点 A での接線 l の下側にある。また (2) より曲線は直線 $y = x$ の下側にある。 $0 < x < 3/4$ では $f''(x) < 0$ なので、接点以外では接線との不等式は厳密である。したがって曲線下の面積 S は、接線 l 、直線 $y = x$ 、 x 軸、直線 $x = 3/4$ で囲まれる四角形 $ABOC$ の面積 T より小さい。

よって

$$\frac{3}{4}L - \frac{1}{4} < -\frac{5}{2}L^2 + \frac{15}{4}L - \frac{9}{8},$$

すなわち

$$20L^2 - 24L + 7 < 0.$$

左辺は $(2L - 1)(10L - 7)$ なので

$$\frac{1}{2} < L < \frac{7}{10}. \quad (2)$$

(1),(2) より

$$\frac{2}{3} \leq \log 2 < \frac{7}{10}.$$

したがって

$\log 2$ の小数第 1 位の数字は 6.

▶ 解法 2 (積分表示と指数置換)

【方針】

$f'(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ と $f(0) = 0$ から f を定積分として捉え、被積分関数の単調性だけで (2) を示す。(3) は $u = x + \sqrt{1+x^2}$ という指数・対数範囲内の置換で独立に計算し、後半の面積評価へ接続する。

【解答】

(1)、(2) 微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

よって $x > 0$ で $f''(x) < 0$ となり、上に凸である。また $f(0) = 0$ なので

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$0 \leq t \leq x$ では

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$$

である。区間の長さ x を掛ければ

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x) \leq x.$$

(3)

$$u = x + \sqrt{1+x^2}$$

と置く。 $u > 0$ であり、 $u^{-1} = \sqrt{1+x^2} - x$ だから

$$x = \frac{u - u^{-1}}{2}, \quad dx = \frac{1 + u^{-2}}{2} du, \quad f(x) = \log u.$$

$x = 0, 3/4$ はそれぞれ $u = 1, 2$ に対応するので

$$S = \frac{1}{2} \int_1^2 (1 + u^{-2}) \log u \, du.$$

ここで

$$\begin{aligned} \int \log u \, du &= u \log u - u, \\ \int u^{-2} \log u \, du &= -\frac{\log u + 1}{u} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[u \log u - u - \frac{\log u + 1}{u} \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(4) $L = \log 2$ とおくと、 $A = (3/4, L)$ 、接線の傾きは $4/5$ である。接線と $y = x$ の交点は $B = (5L - 3, 5L - 3)$ となる。四角形を対角線 AO で 2 つの三角形へ分け、行列式で面積を求めても

$$T = -\frac{5}{2}L^2 + \frac{15}{4}L - \frac{9}{8}$$

を得る。

(5) (2) の積分表示から

$$\frac{1}{4} = \int_0^{3/4} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq S = \frac{3}{4}L - \frac{1}{4}$$

なので $L \geq 2/3$ である。

また、 f は $x > 0$ で狭義に上に凸であるため、曲線は A での接線より厳密に下にあり、 $f(x) \leq x$ でもある。よって $S < T$ で、

$$20L^2 - 24L + 7 = (2L - 1)(10L - 7) < 0.$$

したがって $L < 7/10$ である。以上から

$$\frac{2}{3} \leq \log 2 < \frac{7}{10},$$

ゆえに小数第 1 位は 6 である。

【総評】 難度 7、計算量 7、想定 25 分。微分・積分・接線・面積比較を連結する総合問題である。 $f(3/4) = \log 2$ 、接線の傾き $4/5$ 、 $B = (5 \log 2 - 3, 5 \log 2 - 3)$ が要所となる。 $S < T$ は狭義の凸性により正当化し、 $2/3 \leq \log 2 < 7/10$ まで挟む。部分積分と指数置換の 2 通りで S を照合した。双曲線関数など課程外の記法は用いていない。