

広島大学 2026 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

大小 2 個のさいころを投げ、出た目の最大値を得点とするゲームを「ゲーム X」と呼ぶ。次の問いに答えよ。

(1) A さんがゲーム X を行う。A さんの得点が 5 である確率を求め、既約分数で表せ。

(2) A さんがゲーム X を行う。A さんの得点が 5 であるとき、大きいさいころの出た目が 5 である条件付き確率を求め、既約分数で表せ。

(3) A さんがゲーム X を行う。A さんの得点の期待値を求め、既約分数で表せ。

(4) A さんと B さんがそれぞれゲーム X を行う。A さんの得点が B さんの得点より大きい確率を求め、既約分数で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

得点が最大値で定まるので、得点 k の確率を「両方が k 以下」から「両方が $k-1$ 以下」を引いて求める。(4) は同分布の対称性から、引き分け確率を先に出す。

【解答】

(1) 得点が 5 であるのは、両方の目が 5 以下で、かつ両方の目が 4 以下ではない場合である。したがって場合の数は

$$5^2 - 4^2 = 9$$

であり、求める確率は

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

である。

(2) 得点が 5 である 9 通りのうち、大きいさいころの目が 5 であるのは、小さいさいころの目が 1, 2, 3, 4, 5 の 5 通りである。よって条件付き確率は

$$\frac{5}{9}$$

である。

(3) 得点が k である確率は

$$\frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36} \quad (k = 1, 2, \dots, 6)$$

である。したがって期待値は

$$\sum_{k=1}^6 k \frac{2k-1}{36} = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36}$$

である。

(4) A さんと B さんの得点は同じ分布であるから、A さんの得点が大きい確率と B さんの得点が大きい確率は等しい。引き分けの確率は

$$\frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2}{36^2} = \frac{286}{1296} = \frac{143}{648}$$

である。よって求める確率は

$$\frac{1 - \frac{143}{648}}{2} = \frac{505}{1296}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

得点 M の分布を作る。(3) は $E(M) = \Pr(M \geq 1) + \cdots + \Pr(M \geq 6)$ を使い, (4) は A の得点を固定して B の得点がそれ未満となる場合を直接数える。

【解答】

(1) 得点が 5 となる組は, 一方が 5 で他方が 1 以上 5 以下のものから $(5, 5)$ の重複を除いた $5 + 5 - 1 = 9$ 通りである。よって確率は

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

である。

(2) この 9 通りのうち大きいさいころが 5 であるのは $(5, 1), (5, 2), \dots, (5, 5)$ の 5 通りだから, 条件付き確率は $5/9$ である。

(3) 得点を M とすると, $j = 1, \dots, 6$ に対して

$$\Pr(M \geq j) = 1 - \frac{(j-1)^2}{36}$$

である。したがって

$$E(M) = 6 - \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{36} = 6 - \frac{55}{36} = \frac{161}{36}.$$

(4) A の得点が k である組は $2k - 1$ 通り, B の得点が k 未満である組は $(k-1)^2$ 通りである。よって A が勝つ組は

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 9 + 9 \cdot 16 + 11 \cdot 25 = 505$$

通りである。全組は $36^2 = 1296$ 通りなので, 求める確率は $505/1296$ である。

【総評】 難度 3, 計算量 3。想定時間は 15 分程度。最大値の分布 $2k - 1$ を作る標準解法に加え, 期待値を尾確率の和, 勝率を得点固定の直接計数で求める別解を示した。条件付き確率では大小のさいころを区別し, 引き分けを勝敗のどちらにも含めないことが注意点である。

【第 2 問】

座標平面上に楕円 $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ と 2 点 $A(0, \sqrt{3})$, $B(0, -\sqrt{3})$ がある。 $m > 0$ とし, 点 A を通る傾き m の直線を ℓ とする。楕円 C と直線 ℓ との二つの交点を P, Q とし, 2 点 P, Q の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ をそれぞれ m を用いて表せ。

(2) 線分 PQ の長さを m を用いて表せ。

(3) 線分 BP と線分 BQ の長さの和が 5 であるとき, 線分 PQ の長さを求めよ。また, そのときの m の値を求めよ。

(4) m が (3) で求めた値であるとき, 三角形 BPQ の面積を求めよ。

【方針】

直線を $y = mx + \sqrt{3}$ とおいて楕円に代入し, 交点の x 座標が満たす二次方程式を作る。A, B が楕円の焦点であることを使うと (3) が短くなり, 面積は底辺 PQ と B から直線への距離で出せる。

【解答】

(1) 直線 ℓ は

$$y = mx + \sqrt{3}$$

である。これを楕円の方程式に代入すると

$$x^2 + \frac{(mx + \sqrt{3})^2}{4} = 1$$

より

$$(m^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{3}mx - 1 = 0$$

を得る。したがって解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{m^2 + 4}$$

である。

(2)

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{16(m^2 + 1)}{(m^2 + 4)^2}$$

である。 $\alpha > \beta$ より

$$\alpha - \beta = \frac{4\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 4}$$

である。直線 ℓ 上では、 x 座標の差が $\alpha - \beta$ のとき距離は $\sqrt{1 + m^2}(\alpha - \beta)$ であるから

$$PQ = \frac{4(m^2 + 1)}{m^2 + 4}$$

である。

(3) 楕円 C は長半径 2, 焦点が $A(0, \sqrt{3})$, $B(0, -\sqrt{3})$ である。したがって楕円上の点 X について

$$AX + BX = 4$$

である。 P , Q は直線 ℓ 上で点 A をはさんで反対側にあるので、

$$AP + AQ = PQ$$

である。よって

$$BP + BQ = 8 - (AP + AQ) = 8 - PQ$$

である。これが 5 であるから

$$PQ = 3$$

である。(2) より

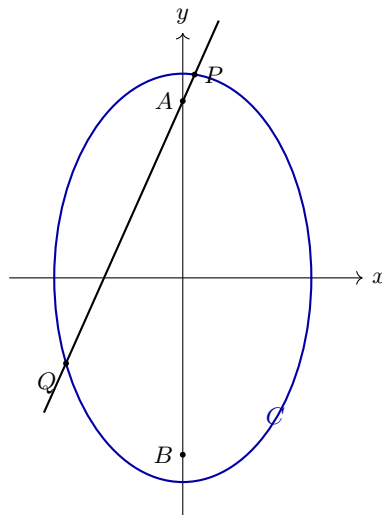
$$\frac{4(m^2 + 1)}{m^2 + 4} = 3$$

であるから、 $m^2 = 8$ となる。 $m > 0$ より

$$m = 2\sqrt{2}$$

である。

焦点と弦の位置関係は次の図のようになる。点 A は線分 PQ の内部にある。



(4) $m = 2\sqrt{2}$ のとき、直線 ℓ は

$$2\sqrt{2}x - y + \sqrt{3} = 0$$

である。点 B から直線 ℓ までの距離は

$$\frac{|0 - (-\sqrt{3}) + \sqrt{3}|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である。したがって三角形 BPQ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 5. 想定時間は 22 分程度。交点の x 座標は解と係数で処理し, 弦長は直線の傾きを掛けて実長へ戻す。後半は A, B が楕円の焦点で $AX + BX = 4$ を満たすこと, A が弦 PQ の内部にあることが核である。焦点間距離と長軸長の混同, 点と直線の距離の分母の落としに注意する。

【第 3 問】

すべての面が合同な四面体 OABC があり, $OA = \sqrt{2}$, $OB = OC = \sqrt{5}$ である。点 O から 3 点 A, B, C の定める平面に垂線 OH を下ろす。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ の値を求めよ。さらに, 三角形 AOB の面積を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ であることを利用して, $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s, t の値を求めよ。
- (3) 垂線 OH の長さを求めよ。
- (4) 四面体 OABC を 3 点 O, C, H の定める平面によって切り, 二つの立体に分ける。体積が小さい方の立体の体積を求めよ。

【方針】

内積と H の位置は文系型と同じ。最後は, H の三角形 ABC 内での重みから, 平面 OCH が辺 AB と交わる点 D の位置を求め, 底面 ABC の面積比を体積比に移す。

【解答】

- (1) すべての面が合同であるから, $AB = AC = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{2}$ である。したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 4, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$

である。三角形 AOB は辺の長さが $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$ の二等辺三角形であるから, 底辺を $\sqrt{2}$ とすると高さは $3/\sqrt{2}$ である。よって面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

である。

- (2)

$$\overrightarrow{OH} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

である。 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{OH} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0, \quad \overrightarrow{OH} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

である。内積の値を代入して

$$5s + 4t = 1, \quad 4s + 5t = 1$$

を得る。よって

$$s = t = \frac{1}{9}$$

である。

- (3) (2) より

$$\overrightarrow{OH} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}$$

である。したがって

$$OH^2 = \left| \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c} \right|^2 = \frac{16}{9}$$

より

$$OH = \frac{4}{3}$$

である。

- (4) (2) より

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$$

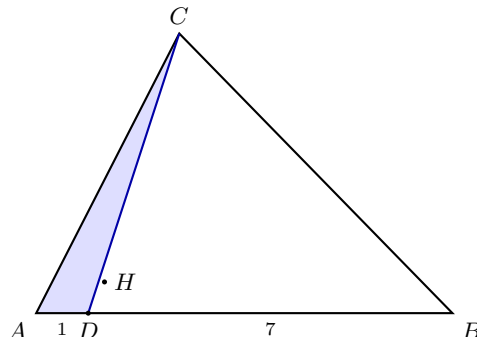
である。平面 OCH と平面 ABC の交線は直線 CH である。直線 CH が辺 AB と交わる点を D とすると、D は直線 CH 上にあるから、H の重み

$$H = \frac{7}{9}A + \frac{1}{9}B + \frac{1}{9}C$$

を用いて、D は

$$D = \frac{7}{8}A + \frac{1}{8}B$$

で表される。したがって $AD : DB = 1 : 7$ である。底面上の位置関係は次の模式図で表せる。



平面 OCH は四面体を、底面が三角形 ACD の部分と三角形 BCD の部分に分ける。底面 ABC 上の面積比は

$$\text{三角形 ACD} : \text{三角形 BCD} = 1 : 7$$

であり、高さは共通なので体積比も $1 : 7$ である。四面体 OABC 全体の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

であるから、体積が小さい方は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

である。

【総評】 難度 6, 計算量 5. 想定時間は 25 分程度。前半は内積と垂直条件の標準処理である。(4) では $H = (7A + B + C)/9$ から直線 CH と辺 AB の交点 $D = (7A + B)/8$ を求め、 $AD : DB = 1 : 7$ を底面積比・体積比へ移す。H を切断面の頂点と誤認すること、面積比の向きを逆にすることが典型的な失点である。

【第 4 問】

p を 2 より大きい実数とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x(1 + x^2)^{-p} (x \geq 0)$ が最大値をとるとき x の値を a とする。 a を p を用いて表せ。

(2) $1 + x^2 = t$ とおくことにより、不定積分

$$\int 2x^3(1 + x^2)^{-p} dx$$

を求めよ。

(3) a を (1) で求めたものとし、

$$S(p) = \int_0^a x(1 + x^2)^{-p} dx$$

とおく。極限值 $\lim_{p \rightarrow \infty} pS(p)$ を求めよ。

(4) a を (1) で求めたものとし、

$$T(p) = \int_0^a 2x^3(1 + x^2)^{-p} dx$$

とおく。極限值 $\lim_{p \rightarrow \infty} p^2T(p)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

最大値の位置は微分で求める。 $S(p)$ は直接積分し、 $(1 + 1/(2p - 1))^{-(p-1)}$ の極限に帰着する。 $T(p)$ は (2) で求めた不定積分に上端 a を代入し、 p^2 を掛けた式を整理して極限をとる。

【解答】

(1)

$$y = x(1 + x^2)^{-p}$$

とおくと

$$y' = (1 + x^2)^{-p-1} \{1 - (2p - 1)x^2\}$$

である。 $x \geq 0$ で $(1 + x^2)^{-p-1} > 0$ であり、 $1 - (2p - 1)x^2$ は $x = 1/\sqrt{2p - 1}$ で符号を正から負に変える。よって

$$a = \frac{1}{\sqrt{2p - 1}}$$

である。

(2) $t = 1 + x^2$ とおくと、 $dt = 2x dx$ 、 $x^2 = t - 1$ であるから

$$\int 2x^3(1 + x^2)^{-p} dx = \int (t - 1)t^{-p} dt$$

である。したがって

$$\int 2x^3(1 + x^2)^{-p} dx = -\frac{t^{2-p}}{p-2} + \frac{t^{1-p}}{p-1} + C = -\frac{(1 + x^2)^{2-p}}{p-2} + \frac{(1 + x^2)^{1-p}}{p-1} + C$$

である。

(3) (1) より $a^2 = 1/(2p - 1)$ である。また

$$S(p) = \int_0^a x(1 + x^2)^{-p} dx = \frac{1 - (1 + a^2)^{1-p}}{2(p-1)}$$

である。ここで

$$1 + a^2 = 1 + \frac{1}{2p - 1}$$

であり、

$$\left(1 + \frac{1}{2p - 1}\right)^{p-1} \rightarrow e^{1/2}$$

だから

$$(1 + a^2)^{1-p} \rightarrow e^{-1/2}$$

である。よって

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1/2})$$

である。

(4) (2) の結果を用いる。 $A = 1 + a^2$ とおくと、(1) より

$$A = 1 + \frac{1}{2p - 1}$$

である。また

$$T(p) = \left[-\frac{(1 + x^2)^{2-p}}{p-2} + \frac{(1 + x^2)^{1-p}}{p-1} \right]_0^a$$

であるから、

$$T(p) = \frac{1}{(p-2)(p-1)} + \frac{A^{1-p}}{p-1} - \frac{A^{2-p}}{p-2}$$

である。したがって

$$p^2 T(p) = \frac{p^2}{(p-2)(p-1)} + \frac{p^2 A^{1-p} \{(p-2) - A(p-1)\}}{(p-2)(p-1)}$$

である。ここで

$$A^{1-p} = \left(1 + \frac{1}{2p-1}\right)^{1-p} \rightarrow e^{-1/2}$$

かつ

$$(p-2) - A(p-1) = -1 - \frac{p-1}{2p-1} \rightarrow -\frac{3}{2}$$

である。よって

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^2 T(p) = 1 - \frac{3}{2}e^{-1/2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1),(2) は標準計算を行う。(3),(4) では $u = px^2$ と尺度を変え、積分区間を $[0, 1/2]$ に固定して $(1 + u/p)^{-p} \rightarrow e^{-u}$ を一様なさみうちで処理する。

【解答】

(1) 微分すると

$$\{x(1+x^2)^{-p}\}' = (1+x^2)^{-p-1}\{1 - (2p-1)x^2\}$$

だから、最大点は $a = 1/\sqrt{2p-1}$ である。

(2) $t = 1 + x^2$ とおけば

$$\int 2x^3(1+x^2)^{-p} dx = -\frac{(1+x^2)^{2-p}}{p-2} + \frac{(1+x^2)^{1-p}}{p-1} + C.$$

(3) $u = px^2$ とおくと $x dx = du/(2p)$ で、上端は

$$r_p = pa^2 = \frac{p}{2p-1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

となる。よって

$$pS(p) = \frac{1}{2} \int_0^{r_p} \left(1 + \frac{u}{p}\right)^{-p} du.$$

$0 \leq u \leq 1$ では

$$u - \frac{u^2}{2p} \leq p \log \left(1 + \frac{u}{p}\right) \leq u$$

だから

$$e^{-u} \leq \left(1 + \frac{u}{p}\right)^{-p} \leq e^{-u+u^2/(2p)}.$$

両端の差は区間全体で 0 に近づく。したがって

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-u} du = \frac{1}{2}(1 - e^{-1/2}).$$

(4) 同じ置換により $2x^3 dx = u du/p^2$ だから

$$p^2 T(p) = \int_0^{r_p} u \left(1 + \frac{u}{p}\right)^{-p} du.$$

上と同じはさみうちを用いると

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 T(p) &= \int_0^{1/2} u e^{-u} du \\ &= \left[-(u+1)e^{-u}\right]_0^{1/2} = 1 - \frac{3}{2}e^{-1/2}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7, 計算量 5. 想定時間は 30 分程度。標準解法は上端 a を代入した式を直接整理し, 別解は $u = px^2$ により極限積分の形を可視化する。後者では対数不等式で $(1 + u/p)^{-p}$ を区間上一様にはさみ, 極限交換を正当化した。 $T(p)$ の第 2 項で 1 次の微小量まで残すことが最重要である。

【第 5 問】

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。次の問いに答えよ。必要ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$ であることを用いてよい。

- (1) すべての自然数 n に対して, a_n は正の有理数であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して, $a_n \geq \sqrt{2n+2}$ であることを示せ。
- (3) すべての自然数 n に対して, $a_n \leq \sqrt{2n+2} + \frac{1}{2} \log n$ であることを示せ。
- (4) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{2n})$ を求めよ。

【方針】

$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + 1/a_n^2$ を基本式にする。下からの評価で $a_n^2 \geq 2n+2$ を作り, その結果を $1/a_n^2$ の上からの評価に戻して上界を得る。最後は上下界からはさむ。

【解答】

(1) $a_1 = 2$ は正の有理数である。 a_n が正の有理数であるとする, $1/a_n$ も正の有理数であり,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

も正の有理数である。よって数学的帰納法により, すべての自然数 n について a_n は正の有理数である。

(2) 漸化式より

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$$

である。 $a_1^2 = 4 = 2 \cdot 1 + 2$ である。 $a_n^2 \geq 2n+2$ と仮定すると

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} \geq 2n+4 = 2(n+1)+2$$

である。よって数学的帰納法により

$$a_n \geq \sqrt{2n+2}$$

である。

(3) (2) より $a_k^2 \geq 2k+2$ であるから

$$\frac{1}{a_k^2} \leq \frac{1}{2k+2}$$

である。また

$$a_n^2 = a_1^2 + 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k^2}$$

である。したがって

$$a_n^2 \leq 4 + 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+2} = 2n+2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$$

である。さらに

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$$

であるから

$$a_n^2 \leq 2n+2 + \frac{1}{2} \log n$$

である。 $a_n > 0$ より

$$a_n \leq \sqrt{2n + 2 + \frac{1}{2} \log n}$$

である。

(4) (2) より

$$a_n - \sqrt{2n} \geq \sqrt{2n + 2} - \sqrt{2n}$$

であり、右辺は 0 に近づく。一方、(3) より

$$a_n - \sqrt{2n} \leq \sqrt{2n + 2 + \frac{1}{2} \log n} - \sqrt{2n}$$

である。右辺を有理化すると

$$\frac{2 + \frac{1}{2} \log n}{\sqrt{2n + 2 + \frac{1}{2} \log n} + \sqrt{2n}}$$

であり、問題文で与えられた極限からこれは 0 に近づく。よってはさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{2n}) = 0$$

である。

【総評】 難度 6, 計算量 4。想定時間は 25 分程度。基本式 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + 1/a_n^2$ を下界の帰納法と上界の和の評価に二度使う構成である。調和和を積分で $\log n$ 以下に抑え、最後は差を有理化して与えられた極限へ接続する。平方根を取る前の正值確認と、下界・上界の不等号の向きに注意する。