

一橋大学 2025 年度 文系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

正の整数 n に対し、 n の正の約数の個数を $d(n)$ とする。たとえば、6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 の 4 個なので、 $d(6) = 4$ である。また、

$$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt{n}}$$

とする。

- (1) $f(2025)$ を求めよ。
- (2) 素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ。
- (3) $f(n)$ の最大値と、そのときの n を求めよ。

【方針】

約数個数公式を用いる。 $f(n)$ は素因数ごとの因子 $(e+1)/p^{e/2}$ の積に分解できるので、各素数についてどの指数が有利かを比較する。(2) で得た増減条件を使うと、最大に寄与するのは 2^2 と 3^1 だけだと分かる。

【解答】

(1) $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ であるから、 $d(2025) = (4+1)(2+1) = 15$ である。また $\sqrt{2025} = 45$ なので、

$$f(2025) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

である。

(2) $d(p^k) = k+1$ より、条件は

$$\frac{k+1}{p^{k/2}} \leq \frac{k+2}{p^{(k+1)/2}},$$

すなわち

$$\sqrt{p} \leq \frac{k+2}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1}$$

である。 $k \geq 1$ なので右辺は $3/2$ 以下であり、 p は 2 に限られる。 $p = 2$ を代入して両辺を 2 乗すると

$$2(k+1)^2 \leq (k+2)^2 \iff k^2 \leq 2.$$

よって正の整数 k は 1 のみであり、求める組は

$$(p, k) = (2, 1)$$

である。

(3) $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ と素因数分解すると、

$$f(n) = \frac{e_1+1}{p_1^{e_1/2}} \cdot \frac{e_2+1}{p_2^{e_2/2}} \cdots \frac{e_s+1}{p_s^{e_s/2}}$$

と、素数ごとの因子の積に分かれる。ここでは積の各因子を個別に最大化すればよい。

$p = 2$ では、指数 0, 1, 2 に対する因子は順に

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{3}{2}$$

である。(2) より指数 2 から先では必ず減少するので、最大は指数 2 のときの $3/2$ である。

$p = 3$ では指数 1 の因子 $2/\sqrt{3}$ が 1 より大きい。一方、(2) より指数 1 から先では減少するので、最大は指数 1 のときである。

$p \geq 5$ では、指数 1 の時点で $2/\sqrt{p} < 1$ であり、(2) よりその後も減少する。したがって、これらの素数は含めない方がよい。

以上より、最大値を与えるのは

$$n = 2^2 \cdot 3 = 12$$

のみであり、最大値は

$$f(12) = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$$

である。

【総評】 【公式出題意図との対応】 公式の出題意図は、素因数分解に関する乗法性と素数べきでの挙動に着目し、約数個数と整数の基本性質を理解しているかを確かめることにある。

難度 6, 計算量 5. 想定時間は 20 分程度。(3) は約数個数の公式を使うだけでなく、素数ごとの寄与を独立に比較する必要がある。採点点は $\sqrt{n}$ を含む関数であることの把握, (2) の不等式変形, 最大値で $2^2 \cdot 3$ だけが残る理由の説明である。

【独立検算】 独立検算では $1 \leq n \leq 200000$ を約数個数の篩で全探索し, $f(n)^2 = d(n)^2/n$ の最大値が 3, 達成する整数が $n = 12$ のみであることも確認した。

【第 2 問】

座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある。また、直線 $x = 2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。

- (1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つような P の y 座標の範囲を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つとき、その 2 つの共有点を通る直線を l とする。 l に関して P と対称な位置にある点を Q とする。ただし、 P が l 上にあるときは $Q = P$ とする。 P の y 座標が (1) で求めた範囲を動くとき、点 Q の軌跡を求め、図示せよ。

【方針】

$P = (2, t)$ とおく。(1) は 2 円の中心間距離が半径の差より大きく和より小さい条件で処理する。(2) は 2 円の方程式を引いて共通弦の直線を出し、点の直線に関する対称移動の式から Q の座標を t で表して消去する。

【解答】

(1) $P = (2, t)$ とおく。2 円が共有点を 2 つ持つための条件は、中心間距離 OP が半径の差 2 より大きく、半径の和 4 より小さいことである。したがって

$$2 < \sqrt{4 + t^2} < 4$$

であり、

$$0 < t^2 < 12$$

となる。よって求める範囲は

$$-2\sqrt{3} < t < 0, \quad 0 < t < 2\sqrt{3}$$

である。

(2) $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, $C_2 : (x - 2)^2 + (y - t)^2 = 1$ である。2 式を引くと、共通弦 l は

$$4x + 2ty = t^2 + 12$$

である。

点 $P = (2, t)$ をこの直線に関して対称移動した点を $Q = (X, Y)$ とする。直線 $4x + 2ty - (t^2 + 12) = 0$ に対する対称移動を用いると、

$$X = \frac{16}{t^2 + 4}, \quad Y = \frac{8t}{t^2 + 4}$$

となる。これより

$$X^2 + Y^2 = \frac{256 + 64t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{64}{t^2 + 4} = 4X$$

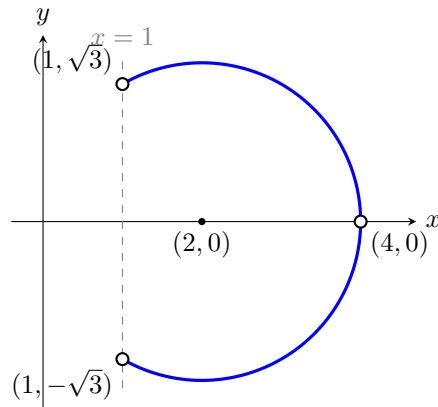
である。したがって

$$(X - 2)^2 + Y^2 = 4$$

を満たす。

また $0 < t^2 < 12$ より $1 < X < 4$ である。逆に、円 $(X - 2)^2 + Y^2 = 4$ 上で $1 < X < 4$ を満たす点は、 $t = 2Y/X$ により上の範囲の t から得られる。よって軌跡は、円 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ のうち $1 < x < 4$ を満たす部分である。端点 $(4, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ は含まない。

実際に端点の除外まで図示すると、次の太線部分である。



白丸の 3 点はいずれも軌跡に含まれない。

【総評】 【公式出題意図との対応】 公式の出題意図は、2 円の共有点条件と共通弦に関する線対称移動を扱い、円・直線の方程式およびパラメータで制限された軌跡を正確に同定できるかを確かめることにある。

難度 6, 計算量 6. 想定時間は 22 分程度。共通弦を根軸として方程式で扱えるかが要点である。採点点は 2 円の交点条件で接する場合を除くこと、共通弦の式、対称移動後の座標、軌跡の端点除外である。図示では中心 $(2, 0)$ 、半径 2 の円のうち $1 < x < 4$ の 2 弧を描けばよい。

【独立検算】 独立検算では複数の t に対して直線への反射を直接計算し、 $Q = (16/(t^2 + 4), 8t/(t^2 + 4))$ と $(X - 2)^2 + Y^2 = 4$ を確認した。

【第 3 問】

等式

$$6 \int_0^2 |x^2 - a| dx = a^2 - 2a + k$$

が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ。

【方針】

左辺を $a < 0$, $0 \leq a \leq 4$, $a > 4$ に分けて計算し、 k を a の関数として表す。各区間での増減と端点値を調べ、水平線 $y = k$ との交点数が合計 4 個になる範囲を数える。

【解答】

与式を

$$k = 6 \int_0^2 |x^2 - a| dx - a^2 + 2a$$

と見て、右辺を $F(a)$ とおく。

$a < 0$ では $|x^2 - a| = x^2 - a$ だから

$$F(a) = 16 - 10a - a^2 = 41 - (a + 5)^2$$

である。この区間では最大値 41 をとり、 $a = 0$ に近づくと値は 16 に近づく。

$0 \leq a \leq 4$ では $x = \sqrt{a}$ で絶対値が切り替わるので、

$$\int_0^2 |x^2 - a| dx = \frac{8}{3} - 2a + \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

である。したがって

$$F(a) = 16 - 10a + 8a\sqrt{a} - a^2$$

であり、

$$F'(a) = -10 + 12\sqrt{a} - 2a = -2(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 5)$$

である。よって $[0, 1]$ で減少、 $[1, 4]$ で増加し、

$$F(0) = 16, F(1) = 13, F(4) = 24$$

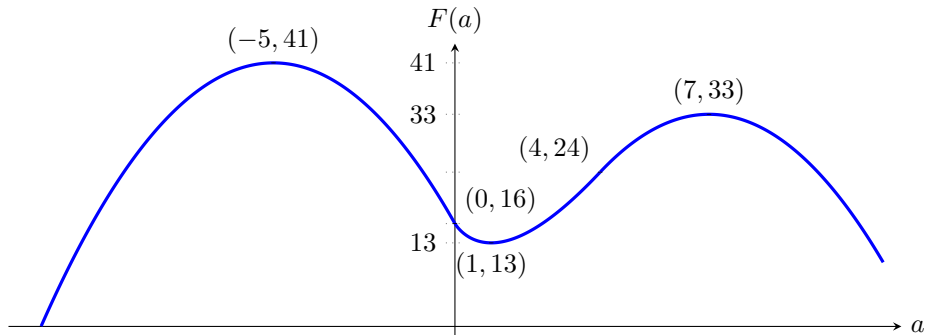
である。

$a > 4$ では $|x^2 - a| = a - x^2$ だから

$$F(a) = -a^2 + 14a - 16 = 33 - (a - 7)^2$$

である。この区間では最大値 33 をとり、 $a = 4$ に近づくと値は 24 に近づく。

増減と接点をまとめると、 $y = F(a)$ の概形は次のようになる。



以上から交点数を数える。 $13 < k < 16$ では、左区間で 1 個、中区間で 2 個、右区間で 1 個、合計 4 個である。 $16 \leq k \leq 24$ でも、端点の重複を含めて合計 4 個である。 $24 < k < 33$ では、左区間で 2 個、中区間で 0 個、右区間で 2 個、合計 4 個である。一方、 $k = 13$ と $k = 33$ では合計 3 個になる。

したがって求める範囲は

$$13 < k < 33$$

である。

【総評】 **【公式出題意図との対応】** 公式の出題意図は、方程式を $k = F(a)$ の形に直し、絶対値を含む積分を処理したうえで、グラフの交点数へ帰着できるかを確かめることにある。

難度 6、計算量 6。想定時間は 22 分程度。絶対値積分を正確に分け、得られた関数の増減から解の個数を読む問題である。採点点は $0 \leq a \leq 4$ の積分計算、端点値 13, 16, 24, 33 の整理、端点で解の個数が変わることの確認である。

【独立検算】 独立検算では各区間の 2 次式・微分・端点値を別々に再計算し、 $k = 13, 33$ では 3 解、 $13 < k < 33$ ではちょうど 4 解となることを確認した。

【第 4 問】

原点を O とする座標空間内の 2 点 $A(0, 3, -5)$, $B(5, -2, 10)$ に対して

$$\overrightarrow{OP} = s\{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\}, \quad s \geq 0, \quad \frac{1}{5} \leq t \leq \frac{3}{5}$$

で定まる点 P が存在する範囲を D とする。 D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち、その中心と原点との距離が最小となるものを C とする。円 C の中心の座標を求めよ。

▶ 標準解法（境界からの距離を最小化）

【方針】

$t = 1/5, 3/5$ に対応する 2 本の境界方向ベクトルを求めると、 D はその 2 本の半直線で挟まれた平面内の角領域になる。中心を $a\vec{u} + b\vec{v}$ と表し、2 本の境界直線からの距離が半径以上になる条件を a, b の下限として書く。原点からの距離を最小にする点を求める。

【解答】

$t = 1/5$ のときの方向ベクトルを

$$\vec{u} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} = (1, 2, -2)$$

とし、 $t = 3/5$ のときの方向ベクトルを

$$\vec{v} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = (3, 0, 4)$$

とする。すると D は

$$a\vec{u} + b\vec{v} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

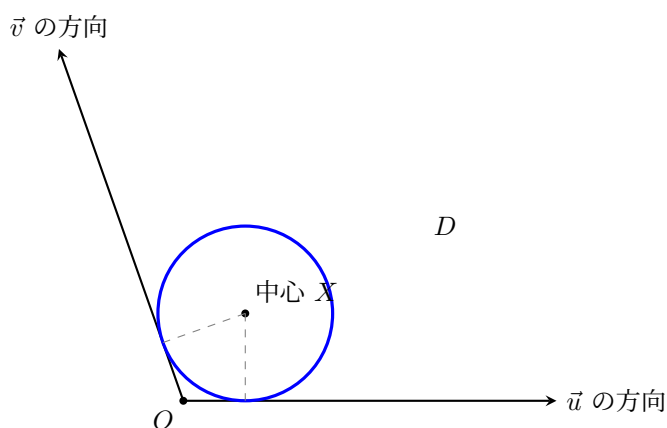
で表される角領域である。

$|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 5, \vec{u} \cdot \vec{v} = -5$ である。2 本の境界直線のなす角を θ とすると、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。

平面内で見れば、中心は両境界から半径以上離れた角領域の内側にあり、最短の中心は両境界に接する。



円の中心を $X = a\vec{u} + b\vec{v}$ とする。境界直線 $O\vec{u}$ からの距離は、 $b\vec{v}$ の $O\vec{u}$ に垂直な成分の長さだから

$$b|\vec{v}| \sin \theta = b \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3}b$$

である。これが半径 $10\sqrt{2}$ 以上であるためには $b \geq 3$ が必要である。同様に、境界直線 $O\vec{v}$ からの距離は

$$a|\vec{u}| \sin \theta = a \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}a$$

であるから、 $a \geq 5$ が必要である。

したがって中心は $a \geq 5, b \geq 3$ の範囲で $|a\vec{u} + b\vec{v}|$ を最小にすればよい。 $A = a - 5 \geq 0, B = b - 3 \geq 0$ とおくと、

$$|a\vec{u} + b\vec{v}|^2 = 9a^2 + 25b^2 - 10ab = 300 + 60A + 100B + 9A^2 + 25B^2 - 10AB$$

である。ここで $A, B \geq 0$ であり、 $9A^2 + 25B^2 \geq 30AB$ だから、 $9A^2 + 25B^2 - 10AB \geq 20AB \geq 0$ である。したがって、最小は $A = B = 0$ 、すなわち $a = 5, b = 3$ のときである。

よって中心は

$$5\vec{u} + 3\vec{v} = 5(1, 2, -2) + 3(3, 0, 4) = (14, 10, 2)$$

である。

▶ 別解（角の二等分線を用いる）

【方針】

最短となる円は 2 本の境界半直線の両方に接する。中心 $X = a\vec{u} + b\vec{v}$ から両境界までの距離を等置し、さらにその共通距離を半径 $10\sqrt{2}$ とおく。

【解答】

$\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (3, 0, 4)$ とおくと, $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $\cos \theta = -1/3$ であるから

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。

原点から最も近い半径 $10\sqrt{2}$ の円は, 2 本の境界半直線の両方に接する。実際, 一方に接していなければ, 中心を領域の内側へ保ったまま原点側へ少し動かせるからである。中心を

$$X = a\vec{u} + b\vec{v} \quad (a, b > 0)$$

とすると, $O\vec{u}$ までの距離は $5b \sin \theta$, $O\vec{v}$ までの距離は $3a \sin \theta$ である。したがって

$$5b \sin \theta = 3a \sin \theta = 10\sqrt{2}.$$

$\sin \theta = 2\sqrt{2}/3$ を代入すると

$$b = 3, \quad a = 5.$$

よって中心は

$$X = 5\vec{u} + 3\vec{v} = (14, 10, 2)$$

である。

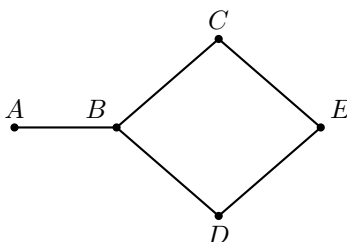
【総評】 【公式出題意図との対応】 公式の出題意図は, 点の集合を 2 本の半直線で囲まれた平面内の領域と捉え, 両方の境界に接する円を用いて空間ベクトルと平面幾何を運用できるかを確認することにある。

難度 7, 計算量 5. 想定時間は 25 分程度。領域 D を 2 本の半直線で挟まれた角領域と見抜くことが最重要である。採点点は端の 2 方向 $(1, 2, -2)$, $(3, 0, 4)$ の計算, 中心から 2 境界への距離条件, $a \geq 5, b \geq 3$ のもとで原点距離を最小化する処理である。

【独立検算】 独立検算では境界方向の内積と外積から両境界までの距離を再計算し, 中心 $(14, 10, 2)$ からの距離がいずれも $10\sqrt{2}$ であることを確認した。

■ 【第 5 問】 ■

5 点 A, B, C, D, E が右図のように線分でむすばれている。



点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ を次のように定めていく。 P_1 を A とする。正の整数 n に対して, P_n を端点とする線分をひとつ無作為にえらび, その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする。

- (1) P_n が A または B である確率 p_n を求めよ。
- (2) P_n が A または B であるとき, $k = 1, 2, \dots, n$ のいずれに対しても $P_k = E$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ。

【方針】

グラフは 2 部的で、奇数番目には A, C, D 、偶数番目には B, E にいる。したがって 2 歩ごとの遷移で考える。(1) では奇数時刻の A の確率、偶数時刻の B の確率をそれぞれ一次漸化式で求める。(2) では E に到達しない条件を付けた同様の 2 歩遷移を数え、(1) の確率で割る。

【解答】

(1) グラフは A, C, D と B, E の間だけに線分があるので、奇数番目では A, C, D 、偶数番目では B, E にいる。

まず $r_m = P(P_{2m-1} = A)$ とおく。奇数番目に A にいると、2 歩後に A にいる確率は $1/3$ である。奇数番目に C または D にいると、2 歩後に A にいる確率は $(1/2)(1/3) = 1/6$ である。したがって

$$r_{m+1} = \frac{1}{3}r_m + \frac{1}{6}(1 - r_m) = \frac{1}{6}r_m + \frac{1}{6}$$

であり、 $r_1 = 1$ である。これを解くと

$$r_m = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{m-1}$$

である。よって

$$p_{2m-1} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

次に $s_m = P(P_{2m} = B)$ とおく。偶数番目に B にいると、2 歩後に B にいる確率は $2/3$ である。偶数番目に E にいると、2 歩後に B にいる確率は $1/2$ である。したがって

$$s_{m+1} = \frac{2}{3}s_m + \frac{1}{2}(1 - s_m) = \frac{1}{6}s_m + \frac{1}{2}$$

であり、 $s_1 = 1$ である。これを解くと

$$s_m = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{m-1}$$

である。よって

$$p_{2m} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

(2) E を一度も通らず、かつ最後に A または B にいる確率を求める。奇数番目について、 $u_m = P(P_1, \dots, P_{2m-1} \neq E, P_{2m-1} = A)$ 、 $w_m = P(P_1, \dots, P_{2m-1} \neq E, P_{2m-1} = C \text{ または } D)$ とおく。 $u_1 = 1, w_1 = 0$ であり、

$$u_{m+1} = \frac{1}{3}u_m + \frac{1}{6}w_m, \quad w_{m+1} = \frac{2}{3}u_m + \frac{1}{3}w_m$$

である。これより $m \geq 2$ では $w_m = 2u_m$ となり、

$$u_m = \frac{2^{m-2}}{3^{m-1}} \quad (m \geq 2)$$

である。また $u_1 = 1$ である。

偶数番目で、 E を通らず最後に B にいる確率は $u_m + w_m/2$ であるから、

$$u_m + \frac{1}{2}w_m = \left(\frac{2}{3} \right)^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

したがって条件付き確率は、まず $q_1 = 1$ であり、 $m \geq 2$ について

$$q_{2m-1} = \frac{2^{m-2}/3^{m-1}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}(\frac{1}{6})^{m-1}} = \frac{5 \cdot 2^{2m-3}}{6^{m-1} + 4}$$

である。また $m \geq 1$ について

$$q_{2m} = \frac{(2/3)^{m-1}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}(\frac{1}{6})^{m-1}} = \frac{5 \cdot 2^{2m-2}}{3 \cdot 6^{m-1} + 2}$$

である。

【総評】 【公式出題意図との対応】 公式の出題意図は、確率の漸化式と条件付き確率の公式を用い、指定された点にいる確率と、途中で特定の点を通らない確率を求める力を確かめることにある。

難度 7, 計算量 7。想定時間は 30 分程度。状態を 5 点のまま追うと煩雑だが、偶奇で到達可能な点が分かれるため、2 歩遷移に直すと一次漸化式で済む。(2) は条件付き確率なので、分子で「最後まで A, B かつ途中で E なし」を数え、分母に (1) の p_n を使うことが重要である。

【独立検算】 独立検算では 5 状態の遷移を有理数で $n = 1$ から 12 まで全列挙し、 p_n, q_n の偶奇別公式と全項一致することを確認した。