

北海道大学 1990 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上の直線 $y = 2(\cos \theta + \sin \theta)x - 1 - \sin 2\theta$ を l_θ とする. ここで θ は $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ を満たす実数とする.

- (1) $a = \cos \theta + \sin \theta$ とするとき, a の値の範囲を求めよ.
- (2) θ を動かすとき直線 l_θ が通る点全体の集合を D とする. D を図示せよ.

▶ 解法 1: 直線族を 1 変数の二次式として調べる

【方針】

まず $a = \cos \theta + \sin \theta$ の範囲を三角関数の合成で求める. 次に $\sin 2\theta = a^2 - 1$ を用いて直線を $y = 2ax - a^2$, $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ の 1 変数族にする. 点全体の集合は、固定した x に対して 2 次式 $2ax - a^2$ が取り得る値の範囲を調べ、端点と頂点の位置で場合分けして図示する.

【解答】

(1) 三角関数を合成すると $a = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ である. $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ より $-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ である. この区間で $\cos$ の値は 0 から 1 までをすべて取るので $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ である.

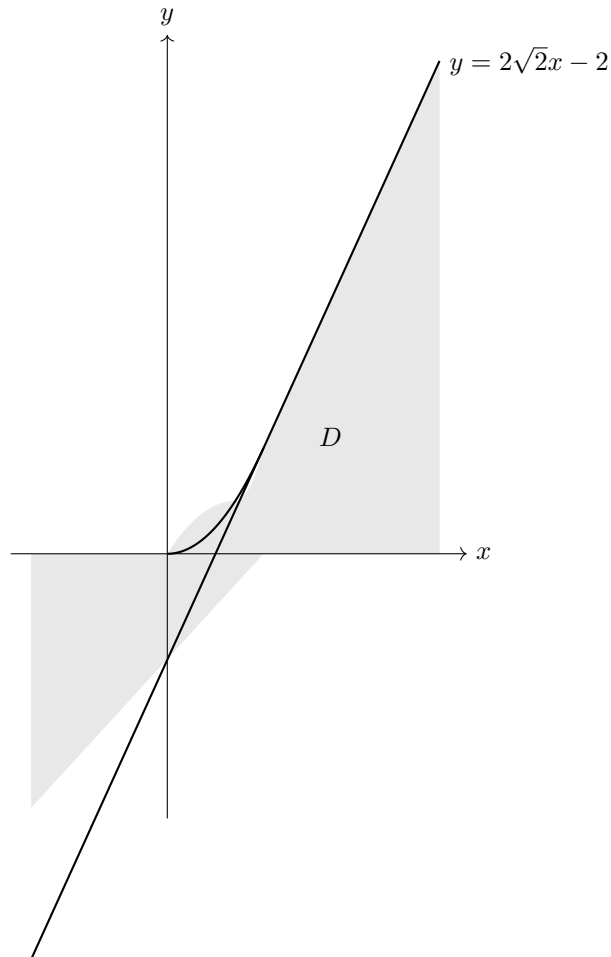
(2) $a^2 = (\cos \theta + \sin \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$ だから $1 + \sin 2\theta = a^2$ である. したがって直線 l_θ は $y = 2ax - a^2$ ($0 \leq a \leq \sqrt{2}$) と表される.

固定した x に対し $g(a) = 2ax - a^2$ とおく. これは a について上に凸ではなく、下に開く 2 次式で、頂点は $a = x$ にある. a の範囲は $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ であるから、最大値は頂点が範囲内にあるかどうか、最小値は端点 $a = 0, \sqrt{2}$ の比較で決まる.

端点での値は $g(0) = 0$, $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}x - 2$ である. $x < 0$ のとき、 $g(a)$ は範囲内で減少するので $2\sqrt{2}x - 2 \leq y \leq 0$ である. $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、頂点 $a = x$ は範囲内にあり、最小値は $g(\sqrt{2})$ である. よって $2\sqrt{2}x - 2 \leq y \leq x^2$ である.

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}$ のとき、頂点 $a = x$ は範囲内にあり、最小値は $g(0)$ である. よって $0 \leq y \leq x^2$ である. $x \geq \sqrt{2}$ のとき、 $g(a)$ は $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ で増加し、最大値は $g(\sqrt{2})$ 、最小値は $g(0)$ である. よって $0 \leq y \leq 2\sqrt{2}x - 2$ である.

以上より、境界は直線 $y = 0$ 、直線 $y = 2\sqrt{2}x - 2$ 、および $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ の放物線 $y = x^2$ である. 図示すると、これらの境界で挟まれた領域全体が D であり、 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で直線 $y = 2\sqrt{2}x - 2$ と x 軸の上下関係が入れ替わる.



▶ 解法 2：平方完成して直線族の通過範囲を求める

【方針】

三角関数の合成で a の範囲を求め、直線族を $y = 2ax - a^2$ に直す。さらに $y = x^2 - (a - x)^2$ と平方完成し、 $a - x$ が動く区間で平方の最小・最大を調べて、固定した x に対する y の範囲を得る。

【解答】

(1)

$$a = \sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

なので

$$0 \leq a \leq \sqrt{2}.$$

(2)

$$1 + \sin 2\theta = a^2$$

より直線族は

$$y = 2ax - a^2 = x^2 - (a - x)^2, \quad 0 \leq a \leq \sqrt{2}.$$

固定した x に対し $a - x$ は

$$-x \leq a - x \leq \sqrt{2} - x$$

を動く。したがって平方の最小値と最大値を調べると

$$\begin{aligned} x < 0: & \quad 2\sqrt{2}x - 2 \leq y \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}: & \quad 2\sqrt{2}x - 2 \leq y \leq x^2, \\ 1/\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}: & \quad 0 \leq y \leq x^2, \\ x \geq \sqrt{2}: & \quad 0 \leq y \leq 2\sqrt{2}x - 2. \end{aligned}$$

境界は $y = 0$ 、 $y = 2\sqrt{2}x - 2$ 、および $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ の放物線 $y = x^2$ である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 5。直線族を a だけで表せるかが要点で、 $\sin 2\theta = a^2 - 1$ に気づけば後半は 2 次式の値域問題になる。最小値は頂点ではなく端点比較で決まるため、 x の区切り $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$ を丁寧に出した。試験場では 18 分程度で、縦切りの範囲をそのまま図の境界説明に対応させるとミスが少ない。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 2 問】

平面上に点 $O(0, 0)$, $A(1, \sqrt{2})$, $B(-1, \sqrt{2})$ をとり、 O と A を通る直線を l , O と B を通る直線を m とする。

(1) 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f が次の条件 (i) と (ii) を満たすための a, b, c, d の条件を求めよ。

(i) f は l を m に移し、 m を l に移す。

(ii) f による A, B の像それぞれ A', B' とすると、 $\triangle OAB$ と $\triangle OA'B'$ は面積が等しい。

(2) 1 次変換 f が (1) の条件を満たしながら変わるとき、点 $C(1, 1)$ の f による像はどのような図形を描くかを調べ、それを図示せよ。

▶ 解法 1：2 本の方方向ベクトルを基底にする

【方針】

直線 l, m はそれぞれ A, B の方向をもつので、 A, B を基準にして $f(A) = \alpha B$, $f(B) = \beta A$ とおく。面積条件は倍率の積の絶対値が 1 であることを意味する。標準座標で行列成分を出し、さらに点 C を A, B の一次結合で表して移った先の座標から $\alpha\beta = \pm 1$ を消去し、2 本の双曲線を得る。

【解答】

(1) 直線 l は $A = (1, \sqrt{2})$ の方向、直線 m は $B = (-1, \sqrt{2})$ の方向をもつ。条件 (i) より、0 でない実数 α, β を用いて $f(A) = \alpha B$, $f(B) = \beta A$ と書ける。

このとき $\triangle OA'B'$ の面積は、 $\triangle OAB$ の面積の $|\alpha\beta|$ 倍である。条件 (ii) より $|\alpha\beta| = 1$ すなわち $\alpha\beta = 1$ または $\alpha\beta = -1$ である。

標準座標で行列を求める。任意の点を A, B の係数で表すため、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とおくと、標準座標での行列は

$$P \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

である。計算すると

$$\begin{pmatrix} \frac{-\alpha + \beta}{2} & \frac{\sqrt{2}(-\alpha + \beta)}{4} \\ \frac{\sqrt{2}(\alpha - \beta)}{2} & \frac{\alpha + \beta}{2} \end{pmatrix}$$

となる。したがって求める条件は、ある実数 α, β が存在して $\alpha\beta = \pm 1$ を満たし、行列が上の形で表されることである。

問題文の成分 a, b, c, d で言い換えると $d = -a$, $c = -2b$, $|2b^2 - a^2| = 1$ である。

(2) 点 $C = (1, 1)$ を $C = uA + vB$ と表す。成分を比較すると $u - v = 1$, $\sqrt{2}(u + v) = 1$ であるから

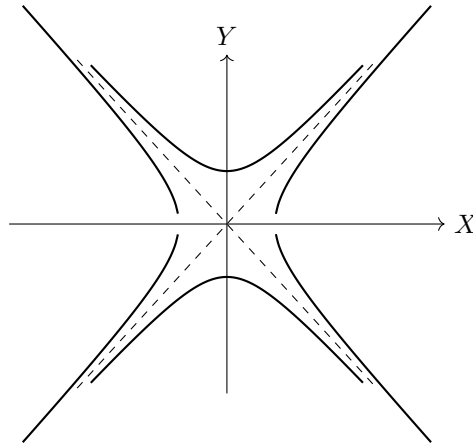
$$u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)$$

である。特に $uv = -\frac{1}{8}$ である。 $f(C) = (X, Y)$ とおくと $f(C) = u\alpha B + v\beta A$ だから $X = -u\alpha + v\beta$, $\frac{Y}{\sqrt{2}} = u\alpha + v\beta$ である。よって

$$\left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right)^2 - X^2 = (u\alpha + v\beta)^2 - (-u\alpha + v\beta)^2 = 4uv\alpha\beta$$

となる。 $uv = -\frac{1}{8}$ より $\left(\frac{Y}{\sqrt{2}} \right)^2 - X^2 = -\frac{1}{2}\alpha\beta$ であり、両辺を 2 倍して $Y^2 - 2X^2 = -\alpha\beta$ を得る。 $\alpha\beta = 1$ のとき

$2X^2 - Y^2 = 1$ であり、 $\alpha\beta = -1$ のとき $Y^2 - 2X^2 = 1$ である。したがって点 C が移る先は、原点を中心とし、漸近線を $Y = \pm\sqrt{2}X$ とする 2 本の双曲線 $2X^2 - Y^2 = 1$, $Y^2 - 2X^2 = 1$ を描く。前者は左右に開き、後者は上下に開く。



▶ 解法 2：行列成分を直接比較して消去する

【方針】

直線 l, m の方向ベクトルの像が相手の直線上にある条件を、行列成分で直接比較する。面積条件は変換倍率の絶対値、すなわち行列式の絶対値が 1 であることを使う。(2) は C の像 (X, Y) と a, b の一次関係から成分を消去する。

【解答】

(1)

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。 $A = (1, \sqrt{2})$ の像が m 上にある条件は

$$c + \sqrt{2}d = -\sqrt{2}(a + \sqrt{2}b).$$

$B = (-1, \sqrt{2})$ の像が l 上にある条件は

$$-c + \sqrt{2}d = \sqrt{2}(-a + \sqrt{2}b).$$

2 式を加減して

$$d = -a, \quad c = -2b$$

を得る。

三角形の面積倍率は

$$|\det M| = |ad - bc| = |2b^2 - a^2|$$

である。したがって必要十分条件は

$$d = -a, \quad c = -2b, \quad |2b^2 - a^2| = 1.$$

(2) $C = (1, 1)$ の像を (X, Y) とすると

$$X = a + b, \quad Y = c + d = -2b - a.$$

これを解いて

$$a = 2X + Y, \quad b = -X - Y.$$

よって

$$2b^2 - a^2 = Y^2 - 2X^2.$$

したがって軌跡は

$$|Y^2 - 2X^2| = 1,$$

すなわち

$$2X^2 - Y^2 = 1 \quad \text{または} \quad Y^2 - 2X^2 = 1.$$

前者は左右、後者は上下に開き、共通の漸近線は

$$Y = \pm\sqrt{2}X$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 6。標準座標で最初から 4 成分を追うと式が散らかるため、 A, B を基準にして直線の入れ替えを $f(A) = \alpha B, f(B) = \beta A$ と置くのが最短である。面積条件の符号を落として $\alpha\beta = 1$ だけにとすると双曲線を 1 本失う。試験場では 25 分程度を見込み、(1) のパラメータ表示と (2) の消去計算を分けて書くで見通しがよい。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 3 問】

n が正の整数のとき、数直線上の区間 $[0, 2]$ が n 個の小区間に分けられているとする。ただし、各小区間の長さ l_k ($k = 1, 2, \dots, n$) はすべて $1 \leq 3nl_k \leq 15$ を満たすとする。正の数 a に対し

$$S_n = (l_1)^a + (l_2)^a + \dots + (l_n)^a$$

とおく。

(1) $a > 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ であることを示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ となる a の範囲を求めよ。

▶ 解法 1：区間長の総和を利用して評価する

【方針】

条件から各小区間の長さは $\frac{1}{3n}$ 以上 $\frac{5}{n}$ 以下で、総和は区間全体の長さ 2 である。(1) では $a > 1$ により $l_k^a = l_k l_k^{a-1}$ を上から評価する。(2) では $0 < a < 1$ のとき指数 $a - 1$ が負になるため不等号の向きが逆転することを使い、下から無限大へ押し上げる。 $a = 1$ と $a > 1$ も別に確認する。

【解答】

(1) 条件 $1 \leq 3nl_k \leq 15$ より $\frac{1}{3n} \leq l_k \leq \frac{5}{n}$ である。また、 $[0, 2]$ を分割しているので $l_1 + l_2 + \dots + l_n = 2$ である。 $a > 1$ とする。このとき $a - 1 > 0$ であり、 $l_k \leq \frac{5}{n}$ から $l_k^{a-1} \leq \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1}$ である。したがって $l_k^a = l_k l_k^{a-1} \leq l_k \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1}$ となる。これを $k = 1, 2, \dots, n$ について足し合わせると

$$0 \leq S_n \leq \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1} (l_1 + \dots + l_n) = 2 \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1}$$

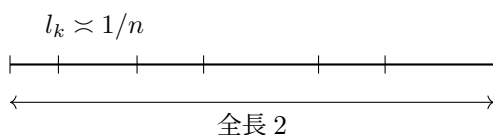
である。 $a - 1 > 0$ だから右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。よって 極限が 0 である。

(2) まず $0 < a < 1$ とする。このとき $a - 1 < 0$ であるから、 $l_k \leq \frac{5}{n}$ より $l_k^{a-1} \geq \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1}$ となる。したがって $l_k^a = l_k l_k^{a-1} \geq l_k \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1}$ であり、足し合わせて

$$S_n \geq \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1} (l_1 + \dots + l_n) = 2 \left(\frac{5}{n}\right)^{a-1}$$

を得る。これは $2 \cdot 5^{a-1} n^{1-a}$ であり、 $1 - a > 0$ なので $n \rightarrow \infty$ で無限大に発散する。

一方、 $a = 1$ のときは $S_n = l_1 + l_2 + \dots + l_n = 2$ で一定である。また $a > 1$ のときは (1) より S_n は 0 に近づく。したがって 極限が無限大 となる a の範囲は $0 < a < 1$ である。



▶ 解法 2：項数だけを使う一様評価

【方針】

各 l_k の上下限をそのまま a 乗し、 n 項の和として評価する。(1) は上限、(2) の $0 < a < 1$ では下限を使う。端点 $a = 1$ と $a > 1$ を別に確認して必要十分性を確定する。

【解答】

条件から

$$\frac{1}{3n} \leq l_k \leq \frac{5}{n}.$$

(1) $a > 1$ なら

$$0 < S_n \leq n \left(\frac{5}{n} \right)^a = 5^a n^{1-a}.$$

$1 - a < 0$ なので右辺は 0 へ近づく。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0.$$

(2) $0 < a < 1$ なら

$$S_n \geq n \left(\frac{1}{3n} \right)^a = 3^{-a} n^{1-a}.$$

$1 - a > 0$ なので右辺は無有限大へ発散する。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

$a = 1$ では

$$S_n = \sum_{k=1}^n l_k = 2,$$

$a > 1$ では (1) より 0 へ近づく。ゆえに求める範囲は

$$0 < a < 1.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。小区間の個数が増える問題だが、個々の長さの上下界と総和 2 を結びつけるだけで処理できる。 $0 < a < 1$ では $a - 1$ が負になるため、不等号が逆になる点が最も危ない。試験場では 12 分程度で、 $a = 1$ を別に確認して範囲の端点を閉じないことを明記したい。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 4 問】

m を与えられた正の整数とする. 曲線 $y = cx^m$, $y = \log x$ をそれぞれ C_1 , C_2 とし, C_1 と C_2 は共通の点 $P(a, b)$ で同じ接線をもつとする. ただし, $\log x$ は自然対数を表す.

- (1) a, b, c を求めよ.
 (2) C_1, C_2 および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

▶ 解法 1: 値と傾きの一致条件を連立する

【方針】

共通接線をもつ条件は、接点での値の一致と傾きの一致で式にする。傾きの式から ca^m が直接求まり、 $\log a$ と比較して a, b, c を決める。面積は、 x 軸、 C_1, C_2 の位置関係を確認し、0 から 1 までは C_1 と x 軸、1 から接点までは $C_1 - C_2$ を積分する。

【解答】

(1) 接点を $P(a, b)$ とする。 $C_2: y = \log x$ 上の点なので $a > 0$ である。

値が一致することから $ca^m = \log a$ である。また、2 曲線が同じ接線をもつので、接点での傾きも一致する。 $y = cx^m$ の傾きは mca^{m-1} 、 $y = \log x$ の傾きは $\frac{1}{x}$ だから $mca^{m-1} = \frac{1}{a}$ である。両辺に a を掛けると $mca^m = 1$ すなわち $ca^m = \frac{1}{m}$ となる。値の一致式と比べて $\log a = \frac{1}{m}$ であるから $a = e^{1/m}$ である。したがって $b = \log a = \frac{1}{m}$ であり、さらに $c = \frac{1}{ma^m} = \frac{1}{me}$ である。

(2) $C_2: y = \log x$ は $x = 1$ で x 軸と交わる。また、接点の x 座標は $a = e^{1/m} > 1$ である。

ここで $h(x) = cx^m - \log x$ とおくと、 $1 \leq x \leq a$ において $h'(x) = mca^{m-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^m - e}{ex}$ である。 $x < a = e^{1/m}$ では $x^m < e$ なので $h'(x) < 0$ 、また $h(a) = 0$ である。したがって $1 \leq x \leq a$ では C_1 が C_2 の上にある。

よって囲まれた面積は

$$S = \int_0^1 cx^m dx + \int_1^a (cx^m - \log x) dx$$

であり、まとめて

$$S = \int_0^a cx^m dx - \int_1^a \log x dx$$

と書ける。したがって $S = \frac{ca^{m+1}}{m+1} - [x \log x - x]_1^a$ である。後半は

$$\int_1^a \log x dx = a \log a - a + 1$$

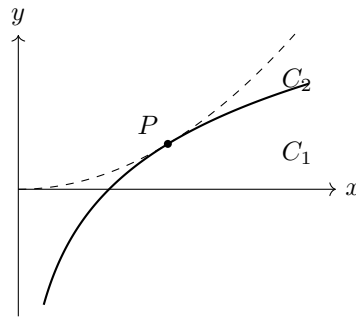
なので $S = \frac{ca^{m+1}}{m+1} - (a \log a - a + 1)$ である。

(1) より $a = e^{1/m}$ 、 $c = \frac{1}{me}$ 、 $\log a = \frac{1}{m}$ を代入する。まず

$$\frac{ca^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{me} \cdot e^{(m+1)/m} = \frac{e^{1/m}}{m(m+1)}$$

であり、 $a \log a - a + 1 = \frac{e^{1/m}}{m} - e^{1/m} + 1$ である。よって $S = \frac{e^{1/m}}{m(m+1)} - \frac{e^{1/m}}{m} + e^{1/m} - 1$ となる。係数をまとめると

$$\frac{1}{m(m+1)} - \frac{1}{m} + 1 = \frac{m}{m+1} \text{ であるから } S = \frac{me^{1/m}}{m+1} - 1 \text{ である。}$$



▶ 解法 2：接点の高さを先に決める

【方針】

接点の高さを b と置く。値の一致から $b = ca^m = \log a$ 、傾きの一致に $ca^m = b$ を代入すると $mb = 1$ が直ちに得られる。
(2) は曲線の上下関係を導関数で確認し、二つの積分をまとめて計算する。

【解答】

(1) 接点 $P(a, b)$ で

$$b = ca^m = \log a.$$

傾きの一致から

$$mca^{m-1} = \frac{1}{a}.$$

両辺に a を掛け、 $ca^m = b$ を用いると

$$mb = 1.$$

したがって

$$b = \frac{1}{m}, \quad a = e^{1/m}, \quad c = \frac{1}{me}.$$

(2)

$$h(x) = cx^m - \log x$$

とすると

$$h'(x) = \frac{x^m - e}{ex}.$$

$1 \leq x < a = e^{1/m}$ では $h'(x) < 0$ 、かつ $h(a) = 0$ なので、この区間では C_1 が C_2 の上にある。

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 cx^m dx + \int_1^a (cx^m - \log x) dx \\ &= \int_0^a cx^m dx - \int_1^a \log x dx \\ &= \frac{ca^{m+1}}{m+1} - (a \log a - a + 1). \end{aligned}$$

求めた a, c を代入すると

$$S = \frac{me^{1/m}}{m+1} - 1.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。接点条件は値と傾きの 2 本を立てるだけだが、 $ca^m = \frac{1}{m}$ を早く取り出せるかで計算量が変わる。面積では 0 から 1 まで $\log x$ は境界にならず、 x 軸が境界になる点に注意する。試験場では 15 分程度で、最後の係数整理を一行ずつ書けば符号ミスを防げる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式や変化の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。