

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 1993 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$a < 0$, $c > 0$ として, 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について, 次の問に答えよ.

- (1) $f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$ を計算せよ.
- (2) ある数 p について, 集合 $\{f(p-1), f(p), f(p+1)\}$ が集合 $\{p-2, p, p+2\}$ と一致しているとき, $f(p) = p+2$ を示し, このときの a の値を求めよ.
- (3) p が整数で (2) の条件を満たし, さらに $f(p+1) = p$, $f(p-1) = p-2$ となっているとき, b , c および p の値を求めよ.

第 2 問

平面上の 3 点を $A(2, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-2, 0)$ とする. 1 次変換 f によって $\triangle ABC$ が次の (i), (ii) を満たす正三角形に移されている.

- (i) 1 つの頂点は $P(4, 0)$ である.
- (ii) x 軸によって面積が 2 等分されている.

このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 線分 OA と辺 BC の交点 D は, BC の中点であることを示せ. ただし, O は原点とする.
- (2) f は A を P に移すことを示し, D の f による像 S の座標を求めよ.
- (3) f を表す行列 X を求めよ.

第 3 問

$a > 0$ に対して,

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + a}$$

とし, $I(x) = F(3x) - F(x)$ とおく.

(1) $I\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ を計算せよ.

(2) $I(x)$ が $x = 2$ で最大値をとるように a の値を定めよ.

第 4 問

平面上を動く点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として

$$x = \sqrt{a}t, \quad y = 1 + \sqrt{1-at} - \frac{t^2}{2}$$

と表されている。ただし、 $0 < a < 1$ とする。

- (1) ある時刻 $t > 0$ で動点 P の軌跡は、 x 軸と交わる。このときの P の x 座標 u を a で表せ。
- (2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 u の最大値を求めよ。
- (3) u の最大値を与える a について、動点 P の $t = 0$ における速度ベクトルが x 軸の正の向きとなす角を求めよ。

第 5 問

袋の中に 1 から 25 までの自然数を 1 つずつ書いた 25 枚のカードが入っている．袋の中からカードを 1 枚取りだして板（図 1）の対応する数字の上におくという操作を 3 回くり返し，板上に 3 枚のカードをおく，ただし，1 度取りだしたカードはもとに戻さない．このとき，事象 K_i ($i = 1, 2, \dots, 25$) と A を次のように定める．

K_i ：最初に取り出したカードに書かれた数が i である．

A ：カードが 3 枚ともある 1 つの行または列の上になっている．

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

図 1

- (1) 事象 $A \cap K_i$ の起こる確率 $P(A \cap K_i)$ と事象 A の起こる確率 $P(A)$ を求めよ．
- (2) A が起こったときは最初に取りだしたカードに書かれた数の 2 乗， A が起こらなかったときは最初に取りだしたカードに書かれた数を値にとる確率変数を X とする． X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)