

北海道大学 1993 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$a < 0$, $c > 0$ として, 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について, 次の間に答えよ.

(1) $f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$ を計算せよ.

(2) ある数 p について, 集合 $\{f(p-1), f(p), f(p+1)\}$ が集合 $\{p-2, p, p+2\}$ と一致しているとき, $f(p) = p+2$ を示し, このときの a の値を求めよ.

(3) p が整数で (2) の条件を満たし, さらに $f(p+1) = p$, $f(p-1) = p-2$ となっているとき, b , c および p の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

2 次関数の 2 階差 $f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$ が常に $2a$ になることをまず計算する。 $a < 0$ なので, 中央の値 $f(p)$ は両隣の平均より大きい。この性質を集合 $\{p-2, p, p+2\}$ に当てはめると, 中央に来られるのは最大値 $p+2$ だけである。残り 2 値の和から a を求め, 最後は指定された $f(p+1), f(p-1)$ との差分で b, c, p を順に決める。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c, \\ f(x-1) &= a(x-1)^2 + b(x-1) + c \\ &= ax^2 - 2ax + a + bx - b + c \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) &= (2ax^2 + 2a + 2bx + 2c) - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= 2a \end{aligned}$$

である。

(2)

(1) を $x = p$ に適用すると $f(p+1) + f(p-1) - 2f(p) = 2a$ である。 $a < 0$ だから $f(p) > \frac{f(p+1) + f(p-1)}{2}$ である。

集合 $\{f(p-1), f(p), f(p+1)\}$ は $\{p-2, p, p+2\}$ と一致している。この 3 つの数のうち、他の 2 つの平均より大きい値になり得るのは最大値 $p+2$ だけである。実際、 $p-2$ は最小値なので不可能であり、 p なら他の 2 つ $p-2, p+2$ の平均が p で、厳密な不等号に反する。よって $f(p) = p+2$ である。

残り 2 つの値は p と $p-2$ であるから $f(p+1) + f(p-1) = 2p-2$ である。したがって

$$\begin{aligned} 2a &= f(p+1) + f(p-1) - 2f(p) \\ &= (2p-2) - 2(p+2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

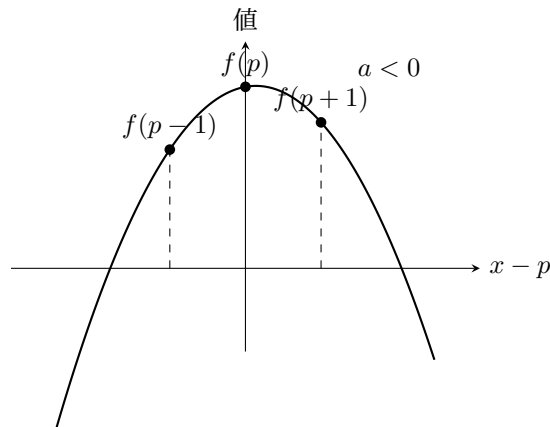
より $a = -3$ である。

(3) $f(p+1) = p$, $f(p) = p+2$ であるから $f(p+1) - f(p) = -2$ である。一方、 $a = -3$ を用いると

$$\begin{aligned} f(p+1) - f(p) &= a\{(p+1)^2 - p^2\} + b \\ &= -3(2p+1) + b \end{aligned}$$

である。よって $-3(2p+1) + b = -2$ から $b = 6p+1$ を得る。

また $f(p) = p+2$ より $-3p^2 + (6p+1)p + c = p+2$ である。整理して $3p^2 + c = 2$ すなわち $c = 2 - 3p^2$ である。条件 $c > 0$ と p が整数であることから $2 - 3p^2 > 0$ であり、これを満たす整数は $p = 0$ だけである。したがって $b = 1$, $c = 2$, $p = 0$ である。



▶ 解法 2

【方針】

p を中心に $h = x - p$ と置き、二次関数を $f(p+h) = ah^2 + \lambda h + f(p)$ と表す。3 値の大小と中央二階差から $f(p)$ と a を決め、指定値を $h = \pm 1$ に代入して係数を戻す。

【解答】

(1)

二次関数の中央二階差を展開すると

$$f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) = 2a.$$

(2)

$A = f(p-1), B = f(p), C = f(p+1)$ とおくと

$$A + C - 2B = 2a < 0,$$

すなわち $B > (A+C)/2$ である。集合 $\{A, B, C\}$ は $\{p-2, p, p+2\}$ に等しい。 $B = p-2$ は上の不等式を満たさず、 $B = p$ なら残る 2 数の平均が p となって等号になってしまう。よって

$$f(p) = p + 2.$$

残る 2 値の和は $2p-2$ だから

$$2a = (2p-2) - 2(p+2) = -6, \quad a = -3.$$

(3)

$h = x - p$ とおけば、ある実数 λ により

$$f(p+h) = -3h^2 + \lambda h + p + 2$$

と書ける。 $f(p+1) = p$ を代入して

$$-3 + \lambda + p + 2 = p, \quad \lambda = 1.$$

したがって

$$f(x) = -3(x-p)^2 + (x-p) + p + 2.$$

展開して

$$b = 6p + 1, \quad c = 2 - 3p^2.$$

p は整数で $c > 0$ だから $2 - 3p^2 > 0$ より $p = 0$ 。ゆえに

$$p = 0, \quad b = 1, \quad c = 2.$$

このとき $f(-1) = -2, f(0) = 2, f(1) = 0$ で、指定条件を満たす。

【総評】 2 次関数の 2 階差の符号を、集合の大小関係に結びつける問題。最大の採点点は、 $a < 0$ から $f(p)$ が両隣の平均より大きいと読み、 $f(p) = p + 2$ を論理的に示す部分である。単に「最大だから」と書くと理由が不足するので、 p の場合は平均と等しくなり不可能であることまで触れるとよい。(3) は差分で b 、代入で c を出し、最後に $c > 0$ と整数条件で $p = 0$ に絞る流れを崩さないこと。通常の係数差分と、 p を原点に移した局所表示の 2 通りを示した。集合の 3 値を単に並べ替えるのではなく、中央二階差が負であることから中央値を一意に決める。

【第 2 問】

平面上の 3 点を $A(2, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-2, 0)$ とする. 1 次変換 f によって $\triangle ABC$ が次の (i), (ii) を満たす正三角形に移されている.

(i) 1 つの頂点は $P(4, 0)$ である.

(ii) x 軸によって面積が 2 等分されている.

このとき, 次の問に答えよ.

(1) 線分 OA と辺 BC の交点 D は, BC の中点であることを示せ. ただし, O は原点とする.

(2) f は A を P に移すことを示し, D の f による像 S の座標を求めよ.

(3) f を表す行列 X を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) で $D = (1/2, 1/2)$ を求め, D が BC の中点であり同時に $D = \frac{1}{4}A$ であることを取り出す. (2) では, $f(D)$ が $f(B)f(C)$ の中点で, しかも $f(D) = \frac{1}{4}f(A)$ であることを利用する. 正三角形で面積を二等分する直線は中線になるので, x 軸上の頂点 P が $f(A)$ であると決め, $S = (1, 0)$ を得る. 最後は反対側の辺の 2 頂点を上下に置いて, 2 通りの行列を計算する.

【解答】

(1)

辺 BC 上の点は $(-2, 0) + s\{(3, 1) - (-2, 0)\} = (-2 + 5s, s)$ と書ける. 直線 OA は $y = x$ であるから, 交点では $s = -2 + 5s$ となり $s = \frac{1}{2}$ である. したがって $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である. これは $s = \frac{1}{2}$ に対応する点なので, D は BC の中点である.

また $A = (2, 2)$ だから $D = \frac{1}{4}A$ である.

(2) D は BC の中点であるから, 1 次変換の線形性より $f(D)$ は $f(B)$ と $f(C)$ を結ぶ辺の中点である. また $D = \frac{1}{4}A$ なので $f(D) = \frac{1}{4}f(A)$ である.

ここで, 移された三角形の頂点を $U = f(A)$, $V = f(B)$, $W = f(C)$ とおく. 上で見たように $S = f(D) = \frac{V+W}{2} = \frac{1}{4}U$ である.

点 $P = (4, 0)$ は, この正三角形の 1 つの頂点である. また x 軸はその正三角形の面積を二等分している. 正三角形で 1 つの頂点を通り面積を二等分する直線は, その頂点から反対側の辺の中点へ引いた中線である.

もし $P = V$ であったとする. このとき x 軸は頂点 $V = P$ から辺 UW の中点へ向かう中線であるから, U, W は $U = (m, h)$, $W = (m, -h)$ ($h \neq 0$) と書ける. すると $S = \frac{V+W}{2} = \left(\frac{4+m}{2}, -\frac{h}{2}\right)$ である. 一方 $S = \frac{1}{4}U$ なので

$S = \left(\frac{m}{4}, \frac{h}{4}\right)$ でもある. 第 2 成分を比べると $-\frac{h}{2} = \frac{h}{4}$ となり, $h = 0$ を導く. これは正三角形がつぶれていないことに反する. したがって $P = V$ は不可能である. $P = W$ の場合も同様に不可能である.

よって残る可能性は $f(A) = U = P = (4, 0)$ だけである.

よって $S = f(D) = \frac{1}{4}f(A) = \frac{1}{4}(4, 0) = (1, 0)$ である.

(3) $S = (1, 0)$ は, $P = (4, 0)$ と反対側の辺の中点である. したがって正三角形の高さは $PS = 3$ である. 正三角形の一辺を r とすると $\frac{\sqrt{3}}{2}r = 3$ だから $r = 2\sqrt{3}$ であり, 反対側の辺の半分の長さは $\sqrt{3}$ である. よって残り 2 頂点は $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ である.

まず $f(B) = (1, \sqrt{3})$, $f(C) = (1, -\sqrt{3})$ とする. 行列を

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと, $f(A) = P$, $f(B) = (1, \sqrt{3})$ から

$$X \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

である。第 1 成分について $2a + 2b = 4$, $3a + b = 1$ より $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$ である。第 2 成分について $2c + 2d = 0$, $3c + d = \sqrt{3}$ より $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $d = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。したがって

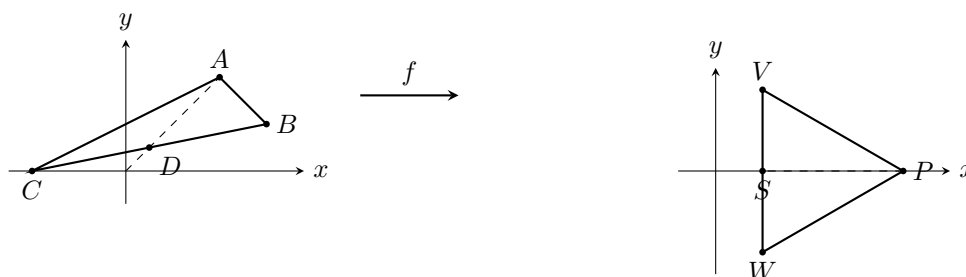
$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

である。

上下を入れ替えた場合、すなわち $f(B) = (1, -\sqrt{3})$, $f(C) = (1, \sqrt{3})$ の場合には、第 1 成分は同じで第 2 成分の符号だけが反対になる。よって

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

像の 3 頂点を U, V, W と置き、 $D = A/4 = (B+C)/2$ から $S = U/4 = (V+W)/2$ を得る。面積二等分線とこのベクトル関係で $U = P$ を確定し、最後は行列積 $X = [U \ V][A \ B]^{-1}$ で 2 通りを同時に計算する。

【解答】

(1)

$$\frac{B+C}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}A$$

であり、この点は BC と OA の両方にある。よって

$$D = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

は BC の中点である。

(2)

$$U = f(A), \quad V = f(B), \quad W = f(C)$$

とおく。線形性から

$$S = f(D) = \frac{1}{4}U = \frac{V+W}{2}.$$

したがって S は正三角形 UVW の辺 VW の中点である。

もし P が V または W なら、 x 軸による面積二等分線はその頂点と反対辺の中点を通る。一方、上式は S が辺 VW 上にあり、同時に U と原点を結ぶ直線上にあることを示す。この二つを満たすと正三角形の高さが 0 になってしまう。よって

$$U = f(A) = P = (4, 0), \quad S = \frac{1}{4}P = (1, 0).$$

(3)

$PS = 3$ は正三角形の高さだから、残る 2 頂点は

$$V = (1, \varepsilon\sqrt{3}), \quad W = (1, -\varepsilon\sqrt{3}) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

また

$$[A \ B]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\begin{aligned} X &= [U \ V][A \ B]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \varepsilon\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} & -\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\varepsilon = 1, -1$ の 2 通りが求める行列である。

【総評】 文系第 3 問と同じ配置を含むが、こちらは $f(A) = P$ を自分で示す必要がある。得点の中心は、 D が BC の中点であることと $D = \frac{1}{4}A$ を同時に使い、 $f(D)$ が反対側の辺の中点になることを説明する点である。正三角形の面積二等分線は中線である、という図形的事実を言葉で書くと答案が安定する。行列は上下 2 通りを必ず残すこと。像の頂点を逐次決める方法と、像行列と逆行列の積で一括計算する方法を示した。 $f(A) = P$ の証明、面積二等分線、上下 2 通りのすべてが必要である。

【第 3 問】

$a > 0$ に対して、

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + a}$$

とし、 $I(x) = F(3x) - F(x)$ とおく。

(1) $I\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ を計算せよ。

(2) $I(x)$ が $x = 2$ で最大値をとるように a の値を定めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$I(x) = F(3x) - F(x)$ をまず x から $3x$ までの積分として書き直す。(1) は $t = \sqrt{a} \tan u$ の置換で端点が $\pi/6$ と $\pi/3$ になることを利用する。(2) は微分して符号を調べ、正の x における最大点が $x = \sqrt{a/3}$ であることを確認し、その点が 2 になるように a を決める。負の側では積分値が正の最大に届かないことも添える。

【解答】

(1)

定義より

$$I(x) = F(3x) - F(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{t^2 + a}$$

である。ここで $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$ とする。置換 $t = \sqrt{a} \tan u$ を用いると $dt = \sqrt{a} \sec^2 u \, du$, $t^2 + a = a(\tan^2 u + 1) = a \sec^2 u$

であるから $\frac{dt}{t^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} du$ となる。

端点は $\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{3x}{\sqrt{a}} = \sqrt{3}$ より $u = \frac{\pi}{6}$, $u = \frac{\pi}{3}$ である。したがって

$$I\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{a}}$$

である。

(2) $I(x) = F(3x) - F(x)$ を微分すると $I'(x) = 3F'(3x) - F'(x)$ である。 $F'(x) = \frac{1}{x^2 + a}$ だから

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{3}{9x^2 + a} - \frac{1}{x^2 + a} \\ &= \frac{3(x^2 + a) - (9x^2 + a)}{(9x^2 + a)(x^2 + a)} \\ &= \frac{2a - 6x^2}{(9x^2 + a)(x^2 + a)} \end{aligned}$$

である。分母は常に正なので、符号は $2a - 6x^2 = 2(a - 3x^2)$ で決まる。

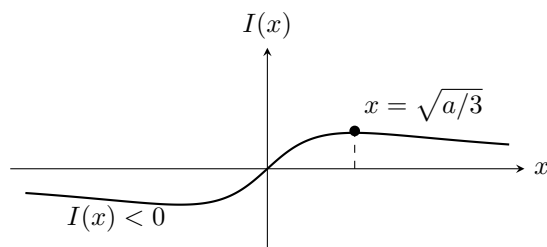
したがって $x > 0$ では $0 < x < \sqrt{\frac{a}{3}}$ で $I'(x) > 0$ 、 $x > \sqrt{\frac{a}{3}}$ で $I'(x) < 0$ である。よって正の x における最大点は $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$ である。

なお $x < 0$ のときは、区間 $[3x, x]$ が負の側にあり

$$I(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{t^2 + a} < 0$$

となる。正の側では $I(x) > 0$ なので、全体の最大値は上の正の点で生じる。

問題では $x = 2$ で最大値をとるようにしたいから $\sqrt{\frac{a}{3}} = 2$ である。よって $a = 12$ である。



▶ 解法 2

【方針】

$t = \sqrt{a} \tan u$ により積分を角度差に直す。(2) では $\tan(\psi - \phi) = 2\sqrt{a}x/(a + 3x^2)$ を作り、相加相乗平均で角度差が最大となる x を微分なしで求める。

【解答】

(1)

$$I(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{t^2 + a}.$$

$x = \sqrt{a/3}$ とし、 $t = \sqrt{a} \tan u$ とおく。端点は

$$u = \frac{\pi}{6}, \quad u = \frac{\pi}{3}$$

に移り、

$$I\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} du = \frac{\pi}{6\sqrt{a}}.$$

(2)

$x > 0$ とし、

$$\tan \phi = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad \tan \psi = \frac{3x}{\sqrt{a}}, \quad 0 < \phi < \psi < \frac{\pi}{2}$$

とおく。同じ置換により

$$I(x) = \frac{\psi - \phi}{\sqrt{a}}.$$

差の公式から

$$\tan(\psi - \phi) = \frac{2\sqrt{a}x}{a + 3x^2}.$$

$0 < \psi - \phi < \pi/2$ なので、 $I(x)$ の最大化は右辺の最大化と同じである。相加相乗平均より

$$a + 3x^2 \geq 2\sqrt{3a}x,$$

等号は $a = 3x^2$ のときに成り立つ。したがって正の側での最大点は

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

$x < 0$ では $I(x) < 0$ だから、これは全実数上の最大点である。最大点を $x = 2$ にする条件は

$$\sqrt{\frac{a}{3}} = 2,$$

よって

$$a = 12.$$

【総評】 積分関数の差を可変区間積分として扱う標準問題。(1) は $t = \sqrt{a} \tan u$ によって端点が $\pi/6, \pi/3$ になることが中心で、置換後の係数 $1/\sqrt{a}$ を落としやすい。(2) は合成関数の微分で $3F'(3x)$ となる点に注意する。最大点の議論では、分母が正であること、 $x < 0$ では積分の向きにより値が負になることまで書くと、 $x = 2$ を全体の最大点として扱う根拠が明確になる。導関数の符号による方法と、角度差の正接を相加相乗平均で最大化する方法を示した。負の x では積分の向きにより $I(x) < 0$ となるため、正の臨界点が全体最大である。

【第 4 問】

平面上を動く点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として

$$x = \sqrt{a}t, \quad y = 1 + \sqrt{1-at} - \frac{t^2}{2}$$

と表されている。ただし、 $0 < a < 1$ とする。

(1) ある時刻 $t > 0$ で動点 P の軌跡は、 x 軸と交わる。このときの P の x 座標 u を a で表せ。

(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 u の最大値を求めよ。

(3) u の最大値を与える a について、動点 P の $t = 0$ における速度ベクトルが x 軸の正の向きとなす角を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

x 軸との交点では $y = 0$ なので、平方根の右辺が非負になる条件から $\sqrt{2} \leq t \leq 2$ を先に押さえる。両辺を 2 乗して $a = t - t^3/4$ と表し、 $u = \sqrt{a}t$ を t の関数として最大化する。(3) では最大時の a を使い、 $t = 0$ の速度ベクトル $(\sqrt{a}, -a/2)$ と x 軸とのなす角を、傾きの絶対値から求める。

【解答】

(1) x 軸と交わる時刻を $t > 0$ とする。このとき $y = 0$ であるから $1 + \sqrt{1-at} - \frac{t^2}{2} = 0$ すなわち $\sqrt{1-at} = \frac{t^2}{2} - 1$ である。左辺は 0 以上なので $\frac{t^2}{2} - 1 \geq 0$ より $t \geq \sqrt{2}$ である。また $1 - at \geq 0$ で、右辺を 2 乗して得られる式から結局 $t \leq 2$ となる。実際、右辺を 2 乗すると $1 - at = \left(\frac{t^2}{2} - 1\right)^2 = \frac{t^4}{4} - t^2 + 1$ だから $at = t^2 - \frac{t^4}{4}$ であり、 $t > 0$ より $a = t - \frac{t^3}{4}$ である。 $a > 0$ なので $t - \frac{t^3}{4} > 0$ すなわち $t < 2$ である。したがって $\sqrt{2} \leq t < 2$ である。

関数 $a(t) = t - t^3/4$ は $\sqrt{2} \leq t < 2$ で単調減少し、値域は $0 < a \leq 1/\sqrt{2}$ である。したがって問題の交点が存在するのはこの範囲で、各 a に対する時刻 t_a は一意である。

$$t_a^3 - 4t_a + 4a = 0, \quad \sqrt{2} \leq t_a < 2$$

と表せば $u(a) = \sqrt{a}t_a$ である。同値に u は $[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}]$ にある方程式

$$u^3 - 4au + 4a^{5/2} = 0$$

の一意な解である。

(2)

(1) の関係式を用いると $u^2 = at^2 = \left(t - \frac{t^3}{4}\right)t^2 = t^3 - \frac{t^5}{4}$ である。 $u > 0$ なので、 u の最大化は u^2 の最大化と同じである。

$$\frac{d}{dt} \left(t^3 - \frac{t^5}{4} \right) = 3t^2 - \frac{5}{4}t^4 = t^2 \left(3 - \frac{5}{4}t^2 \right)$$

である。 $\sqrt{2} \leq t < 2$ において、臨界点は $t^2 = \frac{12}{5}$ である。この点は範囲内にあり、導関数の符号はその前で正、その後で負になるので最大を与える。

したがって $t = \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ である。このとき

$$\begin{aligned} a &= t - \frac{t^3}{4} \\ &= t \left(1 - \frac{t^2}{4} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{5} \left(1 - \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{25} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} u^2 &= at^2 \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{25} \cdot \frac{12}{5} \\ &= \frac{48\sqrt{15}}{125} \end{aligned}$$

である。よって $u_{\max} = \sqrt{\frac{48\sqrt{15}}{125}}$ である。

(3)

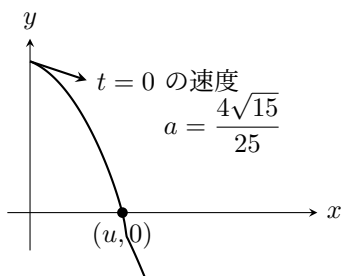
速度ベクトルは

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(\sqrt{a}, -\frac{a}{2\sqrt{1-at}} - t \right)$$

である。したがって $t=0$ では $\left(\sqrt{a}, -\frac{a}{2} \right)$ である。

(2) で最大値を与える $a = \frac{4\sqrt{15}}{25}$ を用いる。速度ベクトルは右下向きなので、 x 軸の正の向きとなす鋭角を θ とする

と $\tan \theta = \frac{a/2}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$ である。ここで $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{4\sqrt{15}}{25}} = \frac{2\sqrt[4]{15}}{5}$ だから $\tan \theta = \frac{\sqrt[4]{15}}{5}$ である。よって求める角 θ は $0 < \theta < \pi/2$ かつ $\tan \theta = \sqrt[4]{15}/5$ を満たす一意な角である。



▶ 解法 2

【方針】

交点時刻 t を媒介変数として $a = t(1 - t^2/4)$ を得る。 $s = t^2$ と置いて $u^4 = s^3(1 - s/4)^2$ の増減を調べ、最後に速度ベクトルの成分比から角を決める。

【解答】

(1)

$y = 0$ なら

$$\sqrt{1 - at} = \frac{t^2}{2} - 1.$$

右辺が非負であることと $a > 0$ から

$$\sqrt{2} \leq t < 2.$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a = t - \frac{t^3}{4} = t \left(1 - \frac{t^2}{4} \right).$$

右辺は $[\sqrt{2}, 2)$ で単調に減少し、その値域は $(0, 1/\sqrt{2}]$ である。したがって問題の交点が存在するのは $0 < a \leq 1/\sqrt{2}$ の場合で、各 a に対する時刻 t_a は一意である。

$$t_a^3 - 4t_a + 4a = 0, \quad \sqrt{2} \leq t_a < 2,$$

と表せば

$$u(a) = \sqrt{a} t_a.$$

同値に、 u は区間 $[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a})$ にある方程式

$$u^3 - 4au + 4a^{5/2} = 0$$

の一意な解である。

(2)

$s = t^2$ とおくと $2 \leq s < 4$ であり、

$$u^4 = a^2 t^4 = s^3 \left(1 - \frac{s}{4} \right)^2.$$

対数微分と同じ積の微分を直接行えば、正の定数因子を除いた導関数の符号は

$$3(4 - s) - 2s = 12 - 5s$$

で決まる。よって最大は

$$s = \frac{12}{5}, \quad t = \sqrt{\frac{12}{5}}$$

のときである。このとき

$$a = t \left(1 - \frac{t^2}{4} \right) = \frac{4\sqrt{15}}{25},$$

$$u_{\max}^2 = at^2 = \frac{48\sqrt{15}}{125}.$$

したがって

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{48\sqrt{15}}{125}}.$$

(3)

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \left(\sqrt{a}, -\frac{a}{2} \right).$$

このベクトルと x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると $0 < \theta < \pi/2$ で、

$$\tan \theta = \frac{a/2}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{\sqrt[4]{15}}{5}.$$

この条件を満たす鋭角 θ が求める角である。

【総評】 平方根を含む軌跡と最大化を、時刻 t の範囲管理で処理する問題。最も危ないのは $y = 0$ からすぐ 2 乗して、右辺 $\frac{t^2}{2} - 1 \geq 0$ の条件を忘れることである。 $a = t - t^3/4$ を得た後は、 $u^2 = t^3 - t^5/4$ の一変数最大化に落ちる。端点近くも含めて $\sqrt{2} \leq t < 2$ の範囲を明記すると、最大点が範囲内であることが確認しやすい。(3) では速度ベクトルが右下向きなので、角を正の鋭角として扱うなら傾きの絶対値を用いる、という説明が必要である。交点の存在範囲 $0 < a \leq 1/\sqrt{2}$ と、各 a に対する交点時刻の一意性を補った。 u の陰関数表示と時刻を媒介変数とする最大化を分け、2 乗時の符号条件も保持した。

【第 5 問】

袋の中に 1 から 25 までの自然数を 1 つずつ書いた 25 枚のカードが入っている。袋の中からカードを 1 枚取り出して板 (図 1) の対応する数字の上におくという操作を 3 回くり返し、板上に 3 枚のカードをおく、ただし、1 度取り出したカードはもとに戻さない。このとき、事象 K_i ($i = 1, 2, \dots, 25$) と A を次のように定める。

K_i : 最初に取り出したカードに書かれた数が i である。

A : カードが 3 枚ともある 1 つの行または列の上のっている。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

図 1

(1) 事象 $A \cap K_i$ の起こる確率 $P(A \cap K_i)$ と事象 A の起こる確率 $P(A)$ を求めよ。

(2) A が起こったときは最初に取り出したカードに書かれた数の 2 乗、 A が起こらなかったときは最初に取り出したカードに書かれた数を値にとる確率変数を X とする。 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

最初のカードを i に固定し、残り 2 枚が同じ行にある場合と同じ列にある場合を順列で数える。 $P(A | K_i)$ が i によらないことを確定し、(2) は $A \cap K_i$ と $A^c \cap K_i$ に分けて期待値の有限和を計算する。

【解答】

(1)

最初に取り出したカードが i であるとする。板は 5 行 5 列で、 i と同じ行には i 以外に 4 枚、同じ列にも i 以外に 4 枚ある。残り 2 枚が i と同じ行にあるような取り出し方は、順序を考えて ${}_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12$ 通りである。同じ列にあるような取り出し方も同じく 12 通りである。2 枚が同じ行にも同じ列にも同時に入ることはないので、条件を満たす取り出し方は $12 + 12 = 24$ 通りである。

最初のカードを固定した後、残り 2 枚の取り出し方は ${}_{24}P_2 = 24 \cdot 23$ 通りである。したがって $P(A | K_i) = \frac{24}{24 \cdot 23} = \frac{1}{23}$ である。また $P(K_i) = \frac{1}{25}$ なので $P(A \cap K_i) = P(K_i)P(A | K_i) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{575}$ である。

これを $i = 1, 2, \dots, 25$ について足せば

$$P(A) = \sum_{i=1}^{25} P(A \cap K_i) = 25 \cdot \frac{1}{575} = \frac{1}{23}$$

である。

(2) K_i が起こり、さらに A が起これば $X = i^2$ であり、 A が起こらなければ $X = i$ である。よって

$$E(X) = \sum_{i=1}^{25} \{i^2 P(A \cap K_i) + i P(A^c \cap K_i)\}$$

である。

ここで

$$P(A^c \cap K_i) = P(K_i) - P(A \cap K_i) = \frac{1}{25} - \frac{1}{575} = \frac{22}{575}$$

であるから

$$E(X) = \frac{1}{575} \sum_{i=1}^{25} i^2 + \frac{22}{575} \sum_{i=1}^{25} i$$

となる。

和を計算すると

$$\sum_{i=1}^{25} i = \frac{25 \cdot 26}{2} = 325$$

であり、

$$\sum_{i=1}^{25} i^2 = \frac{25 \cdot 26 \cdot 51}{6} = 5525$$

である。したがって

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{5525 + 22 \cdot 325}{575} \\ &= \frac{12675}{575} \\ &= \frac{507}{23} \end{aligned}$$

である。

1	2		4	5
6	7		9	10
16	17		19	20
21	22		24	25

最初のカードを含む
1 行または 1 列

▶ 解法 2

【方針】

残り 2 枚を順序なしの組合せで数えて条件付き確率を求める。(2) は K_i のもとでの条件付き期待値を先に作り、 $i = 1, \dots, 25$ の平均を取る。

【解答】

(1)

K_i のもとで、残る 24 枚から順序を考えず 2 枚を選ぶ方法は

$${}_{24}C_2$$

通りである。同じ行から 2 枚を選ぶ方法と同じ列から 2 枚を選ぶ方法はそれぞれ

$${}_4C_2$$

通りで、両者は重ならない。よって

$$P(A \mid K_i) = \frac{{}_4C_2 + {}_4C_2}{{}_{24}C_2} = \frac{1}{23}.$$

したがって

$$P(A \cap K_i) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{575}, \quad P(A) = \sum_{i=1}^{25} P(A \cap K_i) = \frac{1}{23}.$$

(2)

K_i のもとでの条件付き期待値は

$$\begin{aligned} E(X \mid K_i) &= i^2 P(A \mid K_i) + iP(A^c \mid K_i) \\ &= \frac{i^2 + 22i}{23}. \end{aligned}$$

最初のカードは一様だから

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \frac{i^2 + 22i}{23} \\ &= \frac{1}{575} \left(\frac{25 \cdot 26 \cdot 51}{6} + 22 \cdot \frac{25 \cdot 26}{2} \right) \\ &= \frac{507}{23}. \end{aligned}$$

【総評】 条件付き確率と期待値の分解を、5 行 5 列の数え上げで処理する問題。(1) では、同じ行と同じ列の数え上げで順序を考えるため ${}_4P_2$ になる点が重要である。組合せで数えてしまうと確率の分母との対応が崩れやすい。(2) は A と A^c で X の値が変わるので、 $i^2 P(A \cap K_i) + iP(A^c \cap K_i)$ と書けるかが得点の中心である。順序つきの数え上げと組合せによる数え上げを照合し、どちらも $P(A \mid K_i) = 1/23$ を与える。期待値も事象分割と条件付き期待値の 2 経路で一致する。