

入 学 試 験 問 題

数 学



北 海 道 大 学 1997 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a を正の実数, p を実数とし, 2 次関数 $y = -x^2 + 2px + a - p^2$ のグラフを C とする.

(1) x 軸に平行な直線 $l: y = k$ が C と相異なる 2 点で交わるための実数 k に対する条件を求めよ. このとき 2 つの交点のうち, x 座標が小さい方を A , 他方を B とする. A, B の座標を求めよ.

(2) k は (1) の条件と $k > 0$ を満たすとする. 点 A, B を通る y 軸に平行な直線が x 軸と交わる点をそれぞれ A', B' とする. 長方形 $AA'B'B$ の周の長さを k の関数とみて, $L(k)$ とする. $L(k)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

第 2 問

座標平面において、 x 軸上に 3 個の点 $P_0(0, 0)$, $P_1(c, 0)$, $P_2(2, 0)$ をとり、直線 $y = 1$ 上に $(n + 1)$ 個の点 $Q_0(0, 1)$, $Q_1(1, 1)$, $Q_2(2, 1)$, $\dots$, $Q_n(n, 1)$ をとる ($n \geq 1$). ただし、 c は $0 < c < 2$ なる無理数とする. 点 P_i と点 Q_j を結ぶ線分を P_iQ_j ($i = 0, 1, 2; j = 0, 1, \dots, n$) とし、これら $3(n + 1)$ 本の線分から生じる交点の総数を a_n とする. ただし、 P_i ($i = 0, 1, 2$), Q_j ($j = 0, 1, \dots, n$) は交点とはみなさない.

- (1) どの交点においても、これらの線分の中の 3 本が同時に交わることはない. このことを証明せよ.
- (2) $a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$) を求めよ.
- (3) a_n ($n \geq 1$) を求めよ.

第 3 問

a を正の実数とし,

$$f(x) = -x + \log(a+x) - \log(a-x)$$

とおく. ただし, 対数は自然対数とする. x の方程式 $f(x) = 0$ について, $-a < x < a$ の範囲にある異なる実数解の個数を求めよ.

第 4 問

正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があり，曲線 $y = px^p$ ($p > 1$) 上の点 (a_k, pa_k^p) における接線 l_k と x 軸との交点の x 座標が a_{k+1} となっている．また $a_1 = 1$ である．

(1) a_{k+1} と a_k の間の関係式を導き， a_k を求めよ．

(2) 接線 l_k と直線 $x = a_k$ および x 軸で囲まれる三角形の面積を A_k とし，曲線 $y = px^p$ と接線 l_k および直線 $x = a_{k+1}$ で囲まれる図形の面積を B_k とする．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k$$

と

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k$$

を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)