

北海道大学 1997 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を正の実数, p を実数とし, 2 次関数 $y = -x^2 + 2px + a - p^2$ のグラフを C とする.

(1) x 軸に平行な直線 $l: y = k$ が C と相異なる 2 点で交わるための実数 k に対する条件を求めよ. このとき 2 つの交点のうち, x 座標が小さい方を A , 他方を B とする. A, B の座標を求めよ.

(2) k は (1) の条件と $k > 0$ を満たすとする. 点 A, B を通る y 軸に平行な直線が x 軸と交わる点をそれぞれ A', B' とする. 長方形 $AA'B'B$ の周の長さを k の関数とみて, $L(k)$ とする. $L(k)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

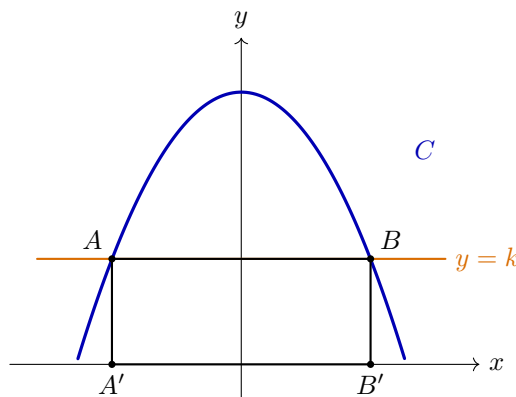
放物線を平方完成して $y = a - (x - p)^2$ と見る. 水平線 $y = k$ との交点は $k < a$ のとき 2 点で, 座標は $p \pm \sqrt{a - k}$ となる. 長方形の幅は $2\sqrt{a - k}$, 高さは k なので, $L(k) = 4\sqrt{a - k} + 2k$. $s = \sqrt{a - k}$ と置いて开区間 $0 < s < \sqrt{a}$ 上の下に凸でない二次式の値域を調べる.

【解答】

(1) 与えられた 2 次関数は $y = -x^2 + 2px + a - p^2 = a - (x - p)^2$ である. 水平線 $y = k$ と交わる点は $k = a - (x - p)^2$ を満たす. すなわち $(x - p)^2 = a - k$ である. 相異なる 2 点で交わるための条件は $a - k > 0$ つまり $k < a$ である.

このとき 2 つの交点は $x = p \pm \sqrt{a - k}$ である. x 座標が小さい方を A , 大きい方を B とするから $A = (p - \sqrt{a - k}, k)$, $B = (p + \sqrt{a - k}, k)$ である.

(2) 今はさらに $k > 0$ なので $0 < k < a$ である. 長方形 $AA'B'B$ の高さは k , 幅は $(p + \sqrt{a - k}) - (p - \sqrt{a - k}) = 2\sqrt{a - k}$ である. したがって周の長さは $L(k) = 2\{k + 2\sqrt{a - k}\} = 2k + 4\sqrt{a - k}$ である. $s = \sqrt{a - k}$ とおくと, $0 < k < a$ より $0 < s < \sqrt{a}$ である. また $k = a - s^2$ なので $L = 2(a - s^2) + 4s = 2a + 2 - 2(s - 1)^2$ である. $0 < a \leq 1$ のとき, $0 < s < \sqrt{a} \leq 1$ であるから, L はこの区間で増加する. したがって端点はどちらも含まれず, 値域は $2a < L < 4\sqrt{a}$ である. $a > 1$ のとき, $s = 1$ が区間内に入るので最大値は $2a + 2$ であり, これは実際に取られる. 下限は区間の両端に近づけたときの値 $2a$, $4\sqrt{a}$ の小さい方である. ただし端点は含まれないので, 値域は $\min(2a, 4\sqrt{a}) < L \leq 2a + 2$ である.



▶ 解法 2

【方針】

周長 $L(k)$ を直接微分し、最大値と開区間の両端極限を比較する。下限がどちらの端から生じるかは $\min(2a, 4\sqrt{a})$ でまとめる。

【解答】

(1)

$$y = a - (x - p)^2$$

だから、 $y = k$ と相異なる 2 点で交わる条件は $k < a$ 。交点は

$$A = (p - \sqrt{a - k}, k), \quad B = (p + \sqrt{a - k}, k).$$

(2)

$0 < k < a$ で、長方形の高さは k 、幅は $2\sqrt{a - k}$ だから

$$L(k) = 2k + 4\sqrt{a - k}.$$

微分すると

$$L'(k) = 2 - \frac{2}{\sqrt{a - k}}.$$

$0 < a \leq 1$ では常に $\sqrt{a - k} < 1$ なので $L'(k) < 0$ 。また

$$\lim_{k \rightarrow 0+} L(k) = 4\sqrt{a}, \quad \lim_{k \rightarrow a-} L(k) = 2a$$

で両端は取らない。よって

$$2a < L < 4\sqrt{a}.$$

$a > 1$ では $k = a - 1$ で最大値

$$L(a - 1) = 2a + 2$$

を取る。最小値は開区間の両端極限の小さい方へ近づくと取れない。したがって

$$\min(2a, 4\sqrt{a}) < L \leq 2a + 2.$$

【総評】 平方完成と値域処理の問題で、想定時間は 30 分程度。交点条件は $k < a$ だが、(2) ではさらに $0 < k < a$ になるため、置換後の s の範囲が開区間になる。この開区間の端点を含まないことが値域の不等号に直結する。 $a \leq 1$ と $a > 1$ で、頂点 $s = 1$ が区間に入るかどうかを分けるのが要点である。

【第 2 問】

座標平面において、 x 軸上に 3 個の点 $P_0(0, 0)$, $P_1(c, 0)$, $P_2(2, 0)$ をとり、直線 $y = 1$ 上に $(n + 1)$ 個の点 $Q_0(0, 1)$, $Q_1(1, 1)$, $Q_2(2, 1)$, $\dots$, $Q_n(n, 1)$ をとる ($n \geq 1$). ただし、 c は $0 < c < 2$ なる無理数とする. 点 P_i と点 Q_j を結ぶ線分を P_iQ_j ($i = 0, 1, 2; j = 0, 1, \dots, n$) とし、これら $3(n + 1)$ 本の線分から生じる交点の総数を a_n とする. ただし、 P_i ($i = 0, 1, 2$), Q_j ($j = 0, 1, \dots, n$) は交点とはみなさない.

- (1) どの交点においても、これらの線分の中の 3 本が同時に交わることはない. このことを証明せよ.
- (2) $a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$) を求めよ.
- (3) a_n ($n \geq 1$) を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

線分の交点は、下側の点の順序と上側の点の順序が逆になった 2 本から生じる。(1) では、もし 3 本が内部で同時に交わるなら、3 本はそれぞれ異なる P_0, P_1, P_2 と異なる Q_i, Q_j, Q_k を結ぶはずなので、高さ s における x 座標を比較する。無理数 c が有理式で表されてしまう矛盾を出す。三重点がないので、交点数は交わる線分 2 本の組数として数えられる。

【解答】

(1)

線分の内部の交点を考える。2 本の線分が同じ P_i を共有すれば、それらの共通点は P_i だけであり、これは交点に数えない。同じ Q_j を共有する場合も同様である。したがって、内部で 3 本が同時に交わるとすれば、それらは P_0, P_1, P_2 から出て、互いに異なる Q_i, Q_j, Q_k に向かう 3 本である。

高さ $y = s$, $0 < s < 1$ における線分 P_mQ_j の x 座標を考える。 $P_m = (p_m, 0)$ と書けば、その x 座標は $(1 - s)p_m + sj$ である。ここで $p_0 = 0$, $p_1 = c$, $p_2 = 2$ である。

もし P_0Q_i , P_1Q_j , P_2Q_k が同じ点で交わるなら $si = (1 - s)c + sj = 2(1 - s) + sk$ である。まず $si = 2(1 - s) + sk$ から $s(i - k + 2) = 2$ となるので、 s は有理数である。次に $si = (1 - s)c + sj$ から $c = \frac{s(i - j)}{1 - s}$ を得る。右辺は有理数であるから c が有理数になってしまう。これは c が無理数であるという仮定に反する。したがって 3 本が同時に交わることはない。

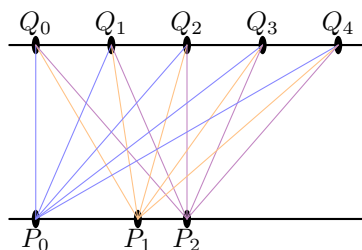
(2)

内部で交わる 2 本の線分は、下側の点の順序と上側の点の順序が逆になっているとき、かつそのときに限られる。下側の点の組は ${}_3C_2 = 3$ 通りであり、上側の点の組は $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ から 2 点を選ぶので ${}_{n+1}C_2$ 通りである。下側の 2 点と上側の 2 点を決めると、交わる線分の組はちょうど 1 組決まる。

(1) より三重点がないので、異なる線分の組が同じ交点を作ることもない。したがって $a_n = 3{}_{n+1}C_2$ である。よって $n \geq 2$ に対して $a_n - a_{n-1} = 3{}_{n+1}C_2 - 3{}_nC_2 = 3n$ である。

(3)

(2) で得た式からただちに $a_n = 3{}_{n+1}C_2 = \frac{3n(n+1)}{2}$ である。



下端と上端で順序が逆になる線分の組が、内部で 1 回交わる。

▶ 解法 2

【方針】

(1) の三重点排除を踏まえ、新しい上端点 Q_n を加えたときだけ生じる交点を数える。各既存点と下端 2 点の選択が新しい交点へ一対一に対応し、階差 $3n$ から一般項を得る。

【解答】

(1)

高さ $0 < s < 1$ における線分 $P_m Q_j$ の x 座標は

$$(1-s)p_m + sj$$

である。3 本が同一点で交わるなら、それらは異なる P_0, P_1, P_2 と異なる Q_i, Q_j, Q_k を結ぶので

$$si = (1-s)c + sj = 2(1-s) + sk.$$

右側 2 本のうち c を含まない等式から s は有理数となり、次に

$$c = \frac{s(i-j)}{1-s}$$

も有理数となる。仮定に反するので三重点はない。

(2)

Q_n を加える。新しい交点は、 Q_n と結ぶ線分、新しい点以外の Q_j と結ぶ線分、異なる 2 個の下端点を選ぶことで一意に定まる。選び方は

$${}_n\mathrm{C}_2 = 3n$$

通りである。三重点がないので重複せず、

$$a_n - a_{n-1} = 3n.$$

(3)

$n = 1$ では $a_1 = 3$ 。したがって階差を足して

$$a_n = 3 + \sum_{m=2}^n 3m = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

【総評】 交点を線分の組として数える組合せ幾何の問題で、想定時間は 35 分程度。 c が無理数である条件は、3 本同時交点を排除するために使われる。ここを省くと、線分 2 本の組を数えたときに同じ交点を重複して数える危険が残る。数え上げでは、下側 2 点と上側 2 点を選べば交わる組がちょうど 1 つ決まる、という対応を明示すると漏れがない。

【第 3 問】

a を正の実数とし、

$$f(x) = -x + \log(a+x) - \log(a-x)$$

とおく. ただし, 対数は自然対数とする. x の方程式 $f(x) = 0$ について, $-a < x < a$ の範囲にある異なる実数解の個数を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

定義域は $-a < x < a$ であり、関数 f は奇関数である。したがって $x = 0$ は常に解で、正の解の個数を調べればよい。導関数 $f'(x) = -1 + 2a/(a^2 - x^2)$ の符号を $a \leq 2$ と $a > 2$ に分け、正の側で単調増加か、いったん減少してから増加かを調べる。 $x \rightarrow a - 0$ で $f(x) \rightarrow \infty$ になることも使う。

【解答】

まず定義域は $-a < x < a$ である。 f について $f(-x) = x + \log(a-x) - \log(a+x) = -f(x)$ であるから、 f は奇関数である。また $f(0) = 0$ なので、 $x = 0$ は常に解である。

導関数を求めると $f'(x) = -1 + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} = -1 + \frac{2a}{a^2 - x^2}$ である。

まず $0 < a \leq 2$ の場合を考える。 $0 < x < a$ では $a^2 - x^2 < a^2$ だから $\frac{2a}{a^2 - x^2} > \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a} \geq 1$ である。したがって $f'(x) > 0$ が $0 < x < a$ で成り立つ。よって f は正の側で増加し、 $f(0) = 0$ だから正の解はない。奇関数性から負の解もない。したがって解は $x = 0$ の 1 個である。

次に $a > 2$ の場合を考える。このとき $f'(0) = -1 + \frac{2}{a} < 0$ である。 $f'(x) = 0$ は $\frac{2a}{a^2 - x^2} = 1$ すなわち $x^2 = a^2 - 2a$ である。正の側では $x_0 = \sqrt{a^2 - 2a}$ がただ 1 つの臨界点である。 $0 < x < x_0$ では $f'(x) < 0$ 、 $x_0 < x < a$ では $f'(x) > 0$ となるので、 f は正の側でいったん減少し、その後増加する。

また

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$$

である。 $x = 0$ の直後では f は減少するので負になり、その後増加して ∞ に向かう。したがって正の解はちょうど 1 個である。奇関数性により負の解も 1 個ある。よって解の個数は 3 である。

以上より、異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 1 & (0 < a \leq 2), \\ 3 & (a > 2) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

正の解について方程式を指数化し、パラメータ a を $h(x) = x \coth(x/2)$ の値域として捉える。 h が 2 から無限大へ単調増加することを示し、奇関数性で負の解も数える。

【解答】

f は奇関数で、 $x = 0$ は常に解である。正の解だけを調べる。

$x > 0$ で $f(x) = 0$ を指数化すると

$$\frac{a+x}{a-x} = e^x.$$

整理して

$$a = h(x) := x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = x \coth \frac{x}{2}.$$

$x \rightarrow 0+$ で $h(x) \rightarrow 2$ 、 $x \rightarrow \infty$ で $h(x) \rightarrow \infty$ である。また

$$h'(x) = \frac{e^{2x} - 1 - 2xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^x(\sinh x - x)}{(e^x - 1)^2} > 0$$

である。最後の不等式は $x > 0$ で $\sinh x > x$ から従う。

したがって h の値域は $(2, \infty)$ 。ゆえに $0 < a \leq 2$ では正の解はなく、解は 0 の 1 個だけである。 $a > 2$ では正の解がただ 1 個あり、奇関数性により負の解もただ 1 個ある。結論は

$$\begin{cases} 1\text{個} & (0 < a \leq 2), \\ 3\text{個} & (a > 2). \end{cases}$$

【総評】 対数関数の方程式を増減で調べる問題で、想定時間は 28 分程度。奇関数性に気づくと、正の側だけを調べればよくなる。 $a = 2$ は境界で、 $f'(0) = 0$ ではあるが $0 < x < a$ では増加するため、正の解は増えない。 $a > 2$ では、原点直後で負になり、 $x \rightarrow a - 0$ で正の無限大に向かうことを合わせて、正の解が 1 個だけであると結論づける。

【第 4 問】

正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があり、曲線 $y = px^p$ ($p > 1$) 上の点 (a_k, pa_k^p) における接線 l_k と x 軸との交点の x 座標が a_{k+1} となっている。また $a_1 = 1$ である。

(1) a_{k+1} と a_k の間の関係式を導き、 a_k を求めよ。

(2) 接線 l_k と直線 $x = a_k$ および x 軸で囲まれる三角形の面積を A_k とし、曲線 $y = px^p$ と接線 l_k および直線 $x = a_{k+1}$ で囲まれる図形の面積を B_k とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k$$

と

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

接線の方程式を求め、 x 軸との交点から $a_{k+1} = ((p-1)/p)a_k$ を得る。面積 A_k は底辺 a_k/p 、高さ pa_k^p の三角形で直接求める。面積 B_k は $x = a_k t$ と置き、曲線と接線の差を t で積分して a_k^{p+1} の定数倍にする。最後は a_k^{p+1} が等比数列になることを用いて和の極限を取る。

【解答】

(1)

曲線は $y = px^p$ である。導関数は $y' = p^2 x^{p-1}$ だから、点 (a_k, pa_k^p) における接線 l_k は $y - pa_k^p = p^2 a_k^{p-1}(x - a_k)$ である。

この接線と x 軸との交点では $y = 0$ なので $-pa_k^p = p^2 a_k^{p-1}(x - a_k)$ である。 $a_k > 0$ より割り算して $x - a_k = -\frac{a_k}{p}$ となる。したがって $x = \frac{p-1}{p}a_k$ である。これが a_{k+1} だから $a_{k+1} = \frac{p-1}{p}a_k$ である。 $a_1 = 1$ より、 a_k は公比 $(p-1)/p$ の等比数列である。したがって $a_k = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{k-1}$ である。

(2)

以後 $q = \frac{p-1}{p}$ とおく。すると $a_{k+1} = qa_k$ であり、 $0 < q < 1$ である。

まず A_k を求める。三角形の底辺は $a_k - a_{k+1} = a_k(1-q) = \frac{a_k}{p}$ であり、高さは pa_k^p である。よって $A_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_k}{p} \cdot pa_k^p = \frac{1}{2}a_k^{p+1}$ である。したがって

$$\sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q^{(k-1)(p+1)}$$

であり、 $0 < q^{p+1} < 1$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{2(1-q^{p+1})}$$

である。

次に B_k を求める。接線の式は、 $x = a_k t$ とおくと $y = pa_k^p \{1 + p(t-1)\}$ となる。一方、曲線は $y = p(a_k t)^p = pa_k^p t^p$ である。 $p > 1$ なので曲線 $y = px^p$ は下に凸であり、接線は曲線の下側にある。したがって

$$B_k = \int_{a_{k+1}}^{a_k} \{px^p - \text{接線の } y\} dx$$

である。 $x = a_k t$ 、 $dx = a_k dt$ 、積分範囲 $q \leq t \leq 1$ を用いると

$$B_k = pa_k^{p+1} \int_q^1 \{t^p - 1 - p(t-1)\} dt$$

である。

ここで

$$\int_q^1 t^p dt = \frac{1 - q^{p+1}}{p+1}$$

である。また、直線 $1 + p(t-1)$ は $t = q$ で 0 、 $t = 1$ で 1 となるので

$$\int_q^1 \{1 + p(t-1)\} dt = \frac{1-q}{2} = \frac{1}{2p}$$

である。したがって

$$p \int_q^1 \{t^p - 1 - p(t-1)\} dt = \frac{p(1 - q^{p+1})}{p+1} - \frac{1}{2}$$

である。よって $B_k = \left\{ \frac{p(1 - q^{p+1})}{p+1} - \frac{1}{2} \right\} a_k^{p+1}$ である。

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k = \left\{ \frac{p(1 - q^{p+1})}{p+1} - \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{1 - q^{p+1}}$$

であり、整理して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k = \frac{p}{p+1} - \frac{1}{2(1 - q^{p+1})}$$

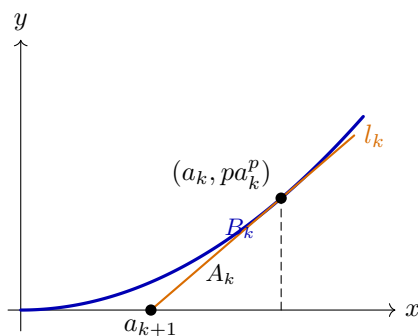
である。 $q = (p-1)/p$ を戻すと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{2 \left\{ 1 - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p+1} \right\}}$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k = \frac{p}{p+1} - \frac{1}{2 \left\{ 1 - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p+1} \right\}}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

各区間 $[a_{k+1}, a_k]$ で、曲線下の面積がちょうど $A_k + B_k$ になることを使う。全区間が $(0, 1]$ を分割するため、総面積を一度に積分し、等比級数で求めた A_k の総和を引く。

【解答】

(1)

接線は

$$y - pa_k^p = p^2 a_k^{p-1} (x - a_k).$$

$y = 0$ とすれば

$$a_{k+1} = \frac{p-1}{p} a_k.$$

$$q = \frac{p-1}{p}$$

とおくと

$$a_k = q^{k-1}.$$

(2)

A_k は底辺 $a_k - a_{k+1} = a_k/p$ 、高さ pa_k^p の三角形だから

$$A_k = \frac{1}{2} a_k^{p+1}.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{2(1 - q^{p+1})}.$$

区間 $[a_{k+1}, a_k]$ では、接線の下三角形が A_k 、曲線と接線の間が B_k なので

$$A_k + B_k = \int_{a_{k+1}}^{a_k} px^p dx.$$

区間 $[a_{k+1}, a_k]$ は重ならず、その和は $(0, 1]$ を覆う。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (A_k + B_k) = \int_0^1 px^p dx = \frac{p}{p+1}.$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_k = \frac{p}{p+1} - \frac{1}{2(1 - q^{p+1})}.$$

$q = (p-1)/p$ を戻せば、求める 2 つの極限が得られる。

【総評】 接線で作られる等比的な面積和を求める問題で、想定時間は 40 分程度。接線の x 切片から a_k が等比数列になることが第一の鍵である。 B_k は図形が複雑に見えるが、 $x = a_k t$ と相似的に拡大縮小して見ると、毎回同じ形の面積に a_k^{p+1} が掛かったものになる。接線が曲線の下側にあること、積分範囲が q から 1 であることを明記すると、式の意味が追いやすい。