

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 1997 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

実数 x に対して、 x 以下の整数のうちで最大のものを $[x]$ と書くことにする． $c > 1$ として、 $a_n = \frac{[nc]}{c}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく．以下の (1), (2), (3) を証明せよ．

- (1) すべての n に対して、 $[a_n]$ は n または $n - 1$ に等しい．
- (2) c が有理数のときは、 $[a_n] = n$ となる n が存在する．
- (3) c が無理数のときは、すべての n に対して $[a_n] = n - 1$ となる．

第 2 問

(1) p を正の定数とし、点 $F(0, p)$ を焦点にもち、 $y = -p$ を準線とする放物線を C とする。 C 上の点 $Q(x_0, y_0)$ (ただし $x_0 \neq 0$) を考え、点 Q と F を通る直線を l_1 、点 Q を通り放物線 C の主軸に平行な直線を l_2 とする。このとき点 Q における C の接線 l は、 l_1 と l_2 のなす角を 2 等分することを示せ。

(2) 放物線 $y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$ 上の点 $R(a, b)$ ($a > \sqrt{2}$) における接線と直線 $x = a$ のなす角を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とする。点 R を通り傾きが $\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し、その定点の座標を求めよ。

第 3 問

p を 0 でない実数とする. 数列 $a_1, a_2, \dots$ を次のように定義する.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + p^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $|p| = 1$ のとき, a_n を求めよ.

(2) $|p| \neq 1$ のとき, a_n を求めよ.

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

を求めよ.

第 4 問

a を実数として，関数 $f(x) = \{x^2 - (a+2)x + a+2\}e^x$ を考える．

(1) $a \neq 0$ のとき， $f(x)$ の極小値を b とする． b を a で表せ．

(2) (1) で求めた b を a の関数とみて， $b = g(a)$ と表す．ただし， $a = 0$ のとき $g(0) = 2$ と定める．このとき，関数 $b = g(a)$ のグラフと a 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

第 5 (a) 問

複素数 α, β (ただし, $\alpha\beta \neq 0$) が与えられている.

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = c + di \quad (a, b, c, d \text{ は実数}, i = \sqrt{-1})$$

とおく.

(1) 複素数 z_0 を $\bar{\alpha} + \beta \neq 0$ の場合は $z_0 = (b - d) + (a + c)i$ と定め, $\bar{\alpha} + \beta = 0$ の場合は $z_0 = -a + bi$ と定める. $|\alpha| = |\beta|$ のとき, z_0 は z の方程式 $\alpha z + \beta \bar{z} = 0$ の解であって, $z_0 \neq 0$ となることを示せ.

(2) $|\alpha| \neq |\beta|$ のとき, z の方程式

$$\alpha z + \beta \bar{z} + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の解の実部と虚部を a, b, c, d で表せ.

(3) $|\alpha| = |\beta|$ かつ方程式①がある複素数 z_1 を解にもつとする. このとき, ①は z_1 と異なる解をもつことを示せ.

第 5 (b) 問

3 個のさいころを同時に振る試行において、出た目の数の積が 4 で割り切れる事象を A とする.

- (1) 事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ.
- (2) この試行を 4 回繰り返したとき、事象 A が 2 回以上起こる確率を求めよ.
- (3) この試行を n 回繰り返したとき、事象 A が k 回起これば $X = 3^k$ で確率変数 X を定義する. このとき、 X の期待値 $E(X)$ を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)