

北海道大学 1997 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数 x に対して、 x 以下の整数のうちで最大のものを $[x]$ と書くことにする． $c > 1$ として、 $a_n = \frac{[nc]}{c}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく．以下の (1), (2), (3) を証明せよ．

- (1) すべての n に対して、 $[a_n]$ は n または $n - 1$ に等しい．
- (2) c が有理数のときは、 $[a_n] = n$ となる n が存在する．
- (3) c が無理数のときは、すべての n に対して $[a_n] = n - 1$ となる．

▶ 解法 1

【方針】

床関数の基本不等式 $[nc] \leq nc < [nc] + 1$ を使い、 $[nc]/c$ を n の直前から n までの範囲に入れる．有理数の場合は、分母を掛けることで nc が整数になる n を作る．無理数の場合は、任意の自然数 n で nc が整数にならないため、上端 $a_n = n$ が起こらないことを示す．

【解答】

(1)

床関数の定義より $[nc] \leq nc < [nc] + 1$ である．これを $nc - 1 < [nc] \leq nc$ と書き直す． $c > 1$ なので、正の数 c で割って $n - \frac{1}{c} < \frac{[nc]}{c} \leq n$ を得る．すなわち $n - \frac{1}{c} < a_n \leq n$ である． $c > 1$ より $0 < 1/c < 1$ だから $n - 1 < a_n \leq n$ である．したがって $[a_n]$ は $n - 1$ または n に等しい．

(2) c が有理数であるとする． $c = r/s$ と既約分数で表す．ただし r, s は正の整数である． $n = s$ と取ると $nc = s \cdot \frac{r}{s} = r$ は整数である．したがって $[nc] = nc$ であり、 $a_n = \frac{[nc]}{c} = \frac{nc}{c} = n$ となる．よって $[a_n] = n$ となる n が存在する．

(3) c が無理数であるとする．任意の自然数 n について、もし nc が整数なら $c = \frac{nc}{n}$ は有理数になってしまう．これは仮定に反する．したがって nc は整数ではない．

よって $[nc] < nc$ であるから $a_n = \frac{[nc]}{c} < n$ である．一方、(1) の途中で得た不等式より $n - 1 < a_n$ である．したがって $n - 1 < a_n < n$ となるので $[a_n] = n - 1$ である．

▶ 解法 2

【方針】

小数部分 $\{nc\} = nc - [nc]$ を導入すると $a_n = n - \{nc\}/c$ と一行で表せる．有理数なら小数部分を 0 にでき、無理数なら 0 にならない、という同じ式から 3 問を統一的に示す．

【解答】

$$\{x\} = x - [x] \quad (0 \leq \{x\} < 1)$$

と書く．このとき

$$a_n = \frac{[nc]}{c} = \frac{nc - \{nc\}}{c} = n - \frac{\{nc\}}{c}.$$

(1)

$0 \leq \{nc\} < 1$ かつ $c > 1$ なので

$$n - 1 < a_n \leq n.$$

よって $[a_n]$ は $n - 1$ または n である．

(2)

$c = r/s$ を既約分数とする． $n = s$ とすれば $nc = r$ は整数だから $\{nc\} = 0$ ．したがって $a_n = n$ で、 $[a_n] = n$ となる．

(3)

c が無理数なら、自然数 n に対して nc は整数にならない。ゆえに

$$0 < \{nc\} < 1$$

であり、

$$n-1 < a_n < n.$$

したがってすべての n で $[a_n] = n-1$ である。

【総評】 床関数と有理・無理の違いを扱う論証問題で、想定時間は 20 分程度。中心は $n-1 < a_n \leq n$ という狭い範囲に押し込むことである。有理数の場合は nc が整数になる n を作る、無理数の場合は nc が絶対に整数にならない、という対比を答案上ではっきり書くとよい。

【第 2 問】

(1) p を正の定数とし、点 $F(0, p)$ を焦点にもち、 $y = -p$ を準線とする放物線を C とする。 C 上の点 $Q(x_0, y_0)$ (ただし $x_0 \neq 0$) を考え、点 Q と F を通る直線を l_1 、点 Q を通り放物線 C の主軸に平行な直線を l_2 とする。このとき点 Q における C の接線 l は、 l_1 と l_2 のなす角を 2 等分することを示せ。

(2) 放物線 $y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$ 上の点 $R(a, b)$ ($a > \sqrt{2}$) における接線と直線 $x = a$ のなす角を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とする。点 R を通り傾きが $\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し、その定点の座標を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は放物線を $x^2 = 4py$ と書き、接線の傾きと QF の傾きを角の 2 倍公式で比較する。(2) では放物線を $y = (x - \sqrt{2})^2 + 2$ と見て、 $u = a - \sqrt{2} > 0$ と置く。接線と鉛直線のなす角から $\tan \theta = 1/(2u)$ を得て、与えられた傾きを $u - 1/(4u)$ に簡約し、直線が常に同じ点を通ることを代入で示す。

【解答】

(1)

焦点が $F(0, p)$ 、準線が $y = -p$ である放物線は $x^2 = 4py$ である。点 $Q(x_0, y_0)$ はこの放物線上にあるので $y_0 = \frac{x_0^2}{4p}$ である。

点 Q における接線の傾きを m とすると、 $x^2 = 4py$ より $2x = 4p \frac{dy}{dx}$ であるから $m = \frac{x_0}{2p}$ である。接線が x 軸となす角を ϕ とすれば $\tan \phi = \frac{x_0}{2p}$ である。

一方、直線 QF の傾きは

$$\frac{y_0 - p}{x_0} = \frac{\frac{x_0^2}{4p} - p}{x_0} = \frac{x_0^2 - 4p^2}{4px_0}$$

である。ここで $\tan 2\phi = \frac{2 \tan \phi}{1 - \tan^2 \phi} = \frac{4px_0}{4p^2 - x_0^2}$ なので $-\frac{1}{\tan 2\phi} = \frac{x_0^2 - 4p^2}{4px_0}$ である。これは直線 QF の傾きに等しい。

直線 l_2 は放物線の主軸に平行、すなわち鉛直線である。接線 l の方向角を ϕ とすると、 l_2 の方向角は 90° であり、上の等式は QF の方向が $2\phi - 90^\circ$ に対応することを示している。したがって接線 l は l_1 と l_2 のなす角を 2 等分する。

(2)

与えられた放物線は $y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = (x - \sqrt{2})^2 + 2$ である。 $u = a - \sqrt{2}$ とおくと、仮定 $a > \sqrt{2}$ より $u > 0$ であり、点 R は $R = (\sqrt{2} + u, u^2 + 2)$ である。

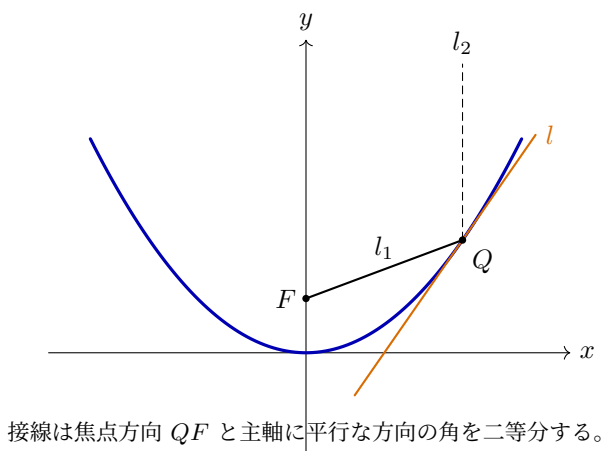
接線の傾きは $2(a - \sqrt{2}) = 2u$ である。接線と鉛直線 $x = a$ のなす角を θ とするので、接線が水平線となす角を ϕ とすれば $\tan \phi = 2u$ 、 $\theta = 90^\circ - \phi$ である。したがって $\tan \theta = \frac{1}{2u}$ である。

問題で与えられた直線の傾きは

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} = \frac{1 - \frac{1}{4u^2}}{\frac{1}{u}} = u - \frac{1}{4u}$$

である。よってその直線は $y - (u^2 + 2) = \left(u - \frac{1}{4u}\right)(x - \sqrt{2} - u)$ で表される。

ここで $x = \sqrt{2}$ を代入すると、右辺は $\left(u - \frac{1}{4u}\right)(-u) = -u^2 + \frac{1}{4}$ である。したがって $y - (u^2 + 2) = -u^2 + \frac{1}{4}$ より $y = \frac{9}{4}$ となる。よってこの直線は a にらず定点 $\left(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right)$ を通る。



▶ 解法 2

【方針】

(1) の反射性をそのまま (2) へ適用する。与えられた傾きは $\cot 2\theta$ であるから、求める直線は点 R と放物線の焦点を結ぶ直線だと読み、平方完成から焦点を即座に求める。

【解答】

(1)

放物線は $x^2 = 4py$ である。 $Q = (2pt, pt^2)$ と媒介表示すると、接線は

$$tx - y = pt^2.$$

接線の方角ベクトルを $\mathbf{u} = (1, t)$ 、主軸方向を $\mathbf{v} = (0, 1)$ とする。また

$$\overrightarrow{QF} = (-2pt, p - pt^2) = p(-2t, 1 - t^2).$$

$\mathbf{u}$ を単位方向に直して反射公式を適用すると、 $\mathbf{v}$ を接線に関して反射した方向は

$$2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} - \mathbf{v} = \frac{1}{1 + t^2} (2t, t^2 - 1),$$

これは $-\overrightarrow{QF}$ と平行である。よって接線は QF と主軸に平行な直線のなす角を二等分する。

(2)

与えられた放物線は

$$y = (x - \sqrt{2})^2 + 2.$$

$X = x - \sqrt{2}$, $Y = y - 2$ と平行移動すれば

$$X^2 = Y = 4 \cdot \frac{1}{4} Y$$

だから、焦点は

$$F = \left(\sqrt{2}, 2 + \frac{1}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right).$$

接線と鉛直線のなす角が θ であるから、(1) より焦点方向の傾きは

$$\cot 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}.$$

したがって問題の直線は R と焦点 F を結ぶ直線にはかならない。ゆえに a によらず

$$\left(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right)$$

を通る。

【総評】 放物線の接線性質と三角関数の 2 倍角を結びつける問題で、想定時間は 35 分程度。(1) は焦点・準線の性質を言葉で済ませず、傾きの等式として角の二等分を示すのが確実である。(2) では $u = a - \sqrt{2}$ と置くと、接線の傾き、 $\tan \theta$ 、与えられた傾きがすべて簡潔になる。最後は定点を推測するだけでなく、 $x = \sqrt{2}$ を代入して常に $y = 9/4$ になることを確認する。

【第 3 問】

p を 0 でない実数とする。数列 $a_1, a_2, \dots$ を次のように定義する。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + p^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $|p| = 1$ のとき、 a_n を求めよ。

(2) $|p| \neq 1$ のとき、 a_n を求めよ。

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

漸化式を反復すると、 a_n は指数が 2 ずつ下がる n 個の項の和になる。 $|p| = 1$ では全項が同じ値になるので別扱いし、 $|p| \neq 1$ では等比数列の和として閉じた形にする。極限は $|p| > 1$ 、 $|p| = 1$ 、 $|p| < 1$ で支配項が変わるため、特に $|p| < 1$ では低い指数の項が支配することに注意する。

【解答】

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + p^{-n}$ を順に展開する。まず $a_2 = p + p^{-1}$ であり、 $a_3 = p(p + p^{-1}) + p^{-2} = p^2 + 1 + p^{-2}$ である。この形から、一般に $a_n = p^{n-1} + p^{n-3} + \dots + p^{1-n}$ となることがわかる。実際、右边を p 倍して p^{-n} を加えると、次の a_{n+1} の形になるので帰納的に正しい。

(1) $|p| = 1$ で p は実数だから $p = 1$ または $p = -1$ である。上で得た和には n 個の項があり、指数はすべて $n-1$ と同じ偶奇である。したがって $a_n = np^{n-1}$ である。すなわち $p = 1$ のとき $a_n = n$ 、 $p = -1$ のとき $a_n = (-1)^{n-1}n$ である。

(2) $|p| \neq 1$ のときは、 $p^2 \neq 1$ である。したがって $a_n = p^{n-1}(1 + p^{-2} + p^{-4} + \dots + p^{-2(n-1)})$ であり、等比数列の和を用いて $a_n = p^{n-1} \frac{1 - p^{-2n}}{1 - p^{-2}}$ となる。分母分子を整理すると $a_n = \frac{p^{n+1} - p^{1-n}}{p^2 - 1}$ である。

(3) $|p| > 1$ のとき、(2) の式で p^{n+1} が支配的であるから $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow p$ である。 $p = 1$ のときは $a_n = n$ なので $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 = p$ である。 $p = -1$ のときは $a_n = (-1)^{n-1}n$ なので $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{n+1}{n} \rightarrow -1 = p$ である。 $|p| < 1$ のとき、(2) の式では p^{1-n} が支配的である。したがって $a_n \sim -\frac{p^{1-n}}{p^2 - 1}$ であり、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{p}$ である。以上より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} p & (|p| \geq 1), \\ \frac{1}{p} & (|p| < 1) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

$b_n = p^{1-n}a_n$ と置いて指数の伸びを消し、等比級数の部分和へ帰着する。一般項を絶対値 $|p|$ の 3 場合に分け、比の極限で支配的な項を明示する。

【解答】

(1)

$p \neq 0$ とし、まず一般に

$$b_n = p^{1-n}a_n$$

とおく。与えられた漸化式から

$$b_{n+1} = b_n + p^{-2n}, \quad b_1 = 1.$$

よって

$$b_n = \sum_{j=0}^{n-1} p^{-2j}.$$

したがって

$$a_n = p^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} p^{-2j} = p^{n-1} + p^{n-3} + \cdots + p^{1-n}.$$

$|p| = 1$ なら $p = \pm 1$ だから

$$a_n = np^{n-1}.$$

(2)

$|p| \neq 1$ 、すなわち $p^2 \neq 1$ なら等比級数を計算して

$$a_n = \frac{p^{n+1} - p^{1-n}}{p^2 - 1}.$$

(3)

$|p| > 1$ では p^{n+1} が支配的なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$$

$0 < |p| < 1$ では p^{-n} 側が支配的なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{p}.$$

$p = 1$ なら $a_n = n$ 、 $p = -1$ なら $a_n = n(-1)^{n-1}$ だから、いずれも極限は p である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} p & (|p| \geq 1), \\ \frac{1}{p} & (0 < |p| < 1). \end{cases}$$

【総評】 線形漸化式を等比和に直す問題で、想定時間は 30 分程度。反復して指数の並び $n-1, n-3, \dots, 1-n$ を見つけるのが第一段階である。 $|p| = 1$ では等比和の分母が 0 になるため必ず別扱いする。極限では、 $|p| < 1$ のとき大きい正の指数ではなく負の指数側が支配するので、答えが p ではなく $1/p$ になる点が最大の注意点である。

【第 4 問】

a を実数として、関数 $f(x) = \{x^2 - (a+2)x + a+2\}e^x$ を考える。

(1) $a \neq 0$ のとき、 $f(x)$ の極小値を b とする。 b を a で表せ。

(2) (1) で求めた b を a の関数とみて、 $b = g(a)$ と表す。ただし、 $a = 0$ のとき $g(0) = 2$ と定める。このとき、関数 $b = g(a)$ のグラフと a 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$f(x) = h(x)e^x$ と見て微分し、 $f'(x) = x(x-a)e^x$ まで因数分解する。極小点は $a > 0$ と $a < 0$ で入れ替わるので、 b を場合分けして求める。次に $b = g(a)$ のグラフが a 軸と囲む有限領域を、零点 $a = -2, 2$ の間として捉え、 $[-2, 0]$ と $[0, 2]$ に分けて面積を積分する。

【解答】

(1) $f(x) = \{x^2 - (a+2)x + a+2\}e^x$ とおく。微分すると $f'(x) = \{2x - (a+2) + x^2 - (a+2)x + a+2\}e^x$ である。中を整理して $f'(x) = (x^2 - ax)e^x = x(x-a)e^x$ を得る。 $e^x > 0$ なので、符号は $x(x-a)$ で決まる。 $a > 0$ のとき、 $f'(x)$ は $x < 0$ で正、 $0 < x < a$ で負、 $x > a$ で正である。したがって $x = a$ が極小点である。このとき $b = f(a) = \{a^2 - (a+2)a + a+2\}e^a = (2-a)e^a$ である。 $a < 0$ のとき、 $f'(x)$ は $x < a$ で正、 $a < x < 0$ で負、 $x > 0$ で正である。したがって $x = 0$ が極小点である。このとき $b = f(0) = a+2$ である。

よって

$$b = \begin{cases} a+2 & (a < 0), \\ (2-a)e^a & (a > 0) \end{cases}$$

である。

(2)

問題の定義より

$$g(a) = \begin{cases} a+2 & (a < 0), \\ 2 & (a = 0), \\ (2-a)e^a & (a > 0) \end{cases}$$

である。 $a < 0$ 側では $g(a) = 0$ となるのは $a = -2$ 、 $a > 0$ 側では $g(a) = 0$ となるのは $a = 2$ である。したがって a 軸と囲まれる有限な図形は $-2 \leq a \leq 2$ にある。

この範囲で $g(a) \geq 0$ なので、面積は

$$\int_{-2}^0 (a+2) da + \int_0^2 (2-a)e^a da$$

である。前半は

$$\int_{-2}^0 (a+2) da = 2$$

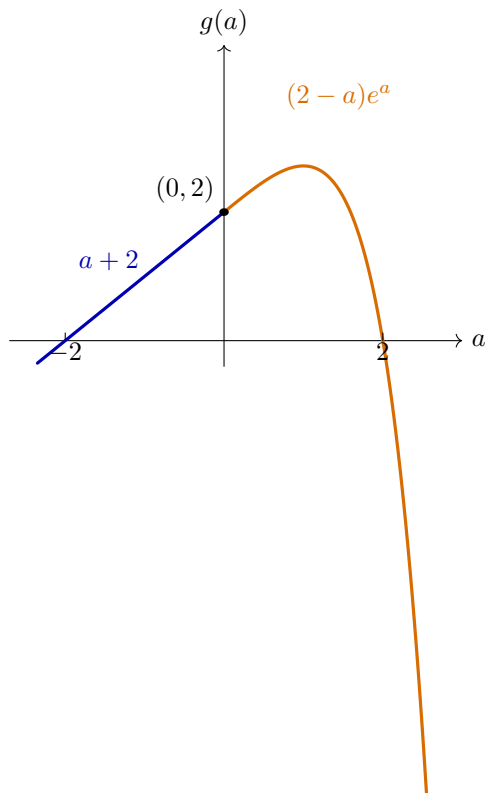
である。後半は

$$\int (2-a)e^a da = (3-a)e^a$$

だから

$$\int_0^2 (2-a)e^a da = [(3-a)e^a]_0^2 = e^2 - 3$$

である。したがって求める面積は $2 + (e^2 - 3) = e^2 - 1$ である。



▶ 解法 2

【方針】

極値そのものを場合分けして $g(a)$ を求める。面積は g のグラフを描いて符号を確認し、直線部分と指数関数部分に分けて積分する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = x(x - a)e^x.$$

$a < 0$ では $x = a$ が極大、 $x = 0$ が極小だから

$$g(a) = f(0) = a + 2.$$

$a > 0$ では $x = 0$ が極大、 $x = a$ が極小で、

$$g(a) = f(a) = (2 - a)e^a.$$

$a = 0$ では問題の定義どおり $g(0) = 2$ と置けば、両側の式が一致する。よって

$$g(a) = \begin{cases} a + 2 & (a \leq 0), \\ (2 - a)e^a & (a \geq 0). \end{cases}$$

(2)

$-2 \leq a \leq 2$ では $g(a) \geq 0$ だから、求める面積は

$$\int_{-2}^2 g(a) da = \int_{-2}^0 (a + 2) da + \int_0^2 (2 - a)e^a da.$$

第 1 項は 2。また

$$\int (2 - a)e^a da = (3 - a)e^a$$

なので第 2 項は $e^2 - 3$ 。したがって面積は

$$2 + (e^2 - 3) = e^2 - 1.$$

【総評】 指数関数つき多項式の微分と、媒介的に得た関数の面積を扱う問題で、想定時間は 30 分程度。 $f'(x) = x(x-a)e^x$ ときれいに因数分解できるため、極小点の位置を $a > 0$ 、 $a < 0$ で正しく分けることが第一の山場である。(2) では $a > 2$ 側にもグラフは続くが、 a 軸と有限に囲む部分は $[-2, 2]$ だけであることを確認してから積分する。

【第 5 問 (a)】

複素数 α, β (ただし, $\alpha\beta \neq 0$) が与えられている。

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = c + di \quad (a, b, c, d \text{ は実数}, i = \sqrt{-1})$$

とおく。

(1) 複素数 z_0 を $\bar{\alpha} + \beta \neq 0$ の場合は $z_0 = (b-d) + (a+c)i$ と定め、 $\bar{\alpha} + \beta = 0$ の場合は $z_0 = -a + bi$ と定める。 $|\alpha| = |\beta|$ のとき、 z_0 は z の方程式 $\alpha z + \beta \bar{z} = 0$ の解であって、 $z_0 \neq 0$ となることを示せ。

(2) $|\alpha| \neq |\beta|$ のとき、 z の方程式

$$\alpha z + \beta \bar{z} + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

の解の実部と虚部を a, b, c, d で表せ。

(3) $|\alpha| = |\beta|$ かつ方程式①がある複素数 z_1 を解にもつとする。このとき、①は z_1 と異なる解をもつことを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

$z = x + iy$ と置き、 $\alpha z + \beta \bar{z}$ の実部・虚部を連立一次方程式にする。係数を消去すると分母に $D = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ が現れるので、 $D = 0$ と $D \neq 0$ で分ける。(1) では指定された z_0 を直接代入して同次方程式の 0 でない解であることを示し、(3) では同次方程式の非零解を既知の解に加えることで異なる解を作る。

【解答】

$z = x + iy$ とおく。このとき $\bar{z} = x - iy$ である。計算すると $\alpha z + \beta \bar{z} = (a+bi)(x+iy) + (c+di)(x-iy)$ であり、実部と虚部はそれぞれ $(a+c)x + (d-b)y$, $(b+d)x + (a-c)y$ である。したがって同次方程式 $\alpha z + \beta \bar{z} = 0$ は $(a+c)x + (d-b)y = 0$, $(b+d)x + (a-c)y = 0$ と同値である。

(1) $|\alpha| = |\beta|$ より $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ である。

まず $\bar{\alpha} + \beta \neq 0$ の場合を考える。このとき $\bar{\alpha} + \beta = (a+c) + (d-b)i$ なので、 $(a+c, d-b)$ は $(0, 0)$ ではない。指定された $z_0 = (b-d) + (a+c)i$ について、実部を $x = b-d$ 、虚部を $y = a+c$ とする。すると第 1 式は $(a+c)(b-d) + (d-b)(a+c) = 0$ となる。第 2 式は $(b+d)(b-d) + (a-c)(a+c) = b^2 - d^2 + a^2 - c^2 = 0$ である。したがって z_0 は同次方程式の解である。また $a+c$ と $d-b$ が同時に 0 ではないので、 $z_0 \neq 0$ である。

次に $\bar{\alpha} + \beta = 0$ の場合を考える。このとき $c = -a$, $d = b$ である。指定された $z_0 = -a + bi$ について $x = -a$, $y = b$ とすると、第 1 式は係数がともに 0 なので成り立つ。第 2 式は $(2b)(-a) + (2a)b = 0$ である。したがってこの場合も z_0 は同次方程式の解である。さらに $\alpha \neq 0$ なので $(-a, b) \neq (0, 0)$ であり、 $z_0 \neq 0$ である。

(2)

方程式 $\alpha z + \beta \bar{z} + 1 = 0$ は、実部と虚部を比較して $(a+c)x + (d-b)y + 1 = 0$, $(b+d)x + (a-c)y = 0$ となる。 $|\alpha| \neq |\beta|$ なので $D = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \neq 0$ である。

この連立方程式を解く。第 1 式、第 2 式から消去すると $x = \frac{c-a}{D}$, $y = \frac{b+d}{D}$ を得る。したがって解の実部と虚部は

$$\operatorname{Re} z = \frac{c-a}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{b+d}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}$$

である。

(3) $|\alpha| = |\beta|$ とする。(1) より、同次方程式 $\alpha z + \beta \bar{z} = 0$ は 0 でない解 z_0 をもつ。

いま、方程式 (*) が解 z_1 をもつとする。すなわち $\alpha z_1 + \beta \bar{z}_1 + 1 = 0$ である。このとき $z_1 + z_0$ を代入すると

$$\alpha(z_1 + z_0) + \beta \overline{(z_1 + z_0)} + 1 = \{\alpha z_1 + \beta \bar{z}_1 + 1\} + \{\alpha z_0 + \beta \bar{z}_0\} = 0$$

となる。したがって $z_1 + z_0$ も (*) の解である。しかも $z_0 \neq 0$ だから $z_1 + z_0 \neq z_1$ である。よって (*) は z_1 と異なる解をもつ。

▶ 解法 2

【方針】

未知数を x, y に分けて、方程式とその共役を 2 本の連立方程式として扱う。行列式は $|\alpha|^2 - |\beta|^2$ となり、一意解と同次解の存在が同じ構造から見える。

【解答】

(1)

$$\alpha z + \beta \bar{z} = 0$$

とその共役

$$\bar{\beta} z + \bar{\alpha} \bar{z} = 0$$

を考える。係数行列の行列式は

$$D = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

$|\alpha| = |\beta|$ では $D = 0$ であり、非零の同次解が存在する。指定された解は、 $\bar{\alpha} + \beta \neq 0$ なら

$$z_0 = i(\bar{\alpha} + \beta) = (b - d) + (a + c)i,$$

$\bar{\alpha} + \beta = 0$ なら

$$z_0 = -\bar{\alpha} = -a + bi.$$

いずれも直接代入して 0 となり、条件から $z_0 \neq 0$ である。

(2)

元の方程式とその共役は

$$\begin{cases} \alpha z + \beta \bar{z} = -1, \\ \bar{\beta} z + \bar{\alpha} \bar{z} = -1. \end{cases}$$

$|\alpha| \neq |\beta|$ なら $D \neq 0$ なので、クラメルの公式から

$$z = \frac{\beta - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}.$$

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ を代入すると

$$\operatorname{Re} z = \frac{c - a}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{b + d}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}.$$

(3)

$|\alpha| = |\beta|$ とし、非同次方程式の 1 解を z_1 、(1) の非零同次解を z_0 とする。線形性により

$$\alpha(z_1 + z_0) + \beta \overline{(z_1 + z_0)} + 1 = 0.$$

$z_0 \neq 0$ だから $z_1 + z_0 \neq z_1$ 。よって 1 解があれば必ず別の解もある。

【総評】 複素数の方程式を実部・虚部の連立方程式に直す問題で、想定時間は 40 分程度。 $|\alpha| = |\beta|$ のときは一意に解くのではなく、同次方程式に非零解があることを使うのが本質である。(1) は指定された z_0 を「明らか」とせず、2 本の実方程式に代入して確認する必要がある。(3) は線形性により、既知の解に同次解を足すと別の解が得られる、という構造を明確に書くとよい。

【第 5 問 (b)】

3 個のさいころを同時に振る試行において、出た目の数の積が 4 で割り切れる事象を A とする.

(1) 事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ.

(2) この試行を 4 回繰り返したとき、事象 A が 2 回以上起こる確率を求めよ.

(3) この試行を n 回繰り返したとき、事象 A が k 回起これば $X = 3^k$ で確率変数 X を定義する. このとき、 X の期待値 $E(X)$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

1 回の試行で積が 4 で割り切れる確率を、余事象「2 の因数が合計 0 個または 1 個」で求める. 成功確率が $5/8$ と分かれば、(2) は二項分布で「2 回以上」を余事象から計算する. (3) も成功回数 K が二項分布に従うので、 $E(3^K)$ を二項定理で一括計算する.

【解答】

(1)

3 個のさいころの目の積が 4 で割り切れるかどうかは、積に含まれる 2 の因数の個数で決まる. 4 で割り切れないのは、2 の因数が合計 0 個または 1 個の場合である.

すべての目が奇数である確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$ である. また、2 の因数をちょうど 1 個だけ含むには、1 個のさいころが 2 または 6 を出し、残り 2 個が奇数を出せばよい. したがってその確率は $3 \cdot \frac{2}{6} \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$ である. よって余事象の確率は $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ であり、求める確率は $P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ である.

(2)

1 回の試行で A が起こる確率は $5/8$ 、起こらない確率は $3/8$ である. 4 回のうち A が 2 回以上起こる確率は、0 回または 1 回起こる確率を 1 から引けばよい. したがって

$$1 - \left(\frac{3}{8}\right)^4 - {}_4C_1 \frac{5}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^3$$

である. これを計算すると $1 - \frac{81}{4096} - \frac{540}{4096} = \frac{3475}{4096}$ である.

(3) n 回の試行で事象 A が起こる回数を K とする. すると K は成功確率 $5/8$ の二項分布に従う. 問題の確率変数は $X = 3^K$ であるから

$$E(X) = \sum_{k=0}^n 3^k {}_nC_k \left(\frac{5}{8}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^{n-k}$$

である. 二項定理より

$$E(X) = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{15}{8}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^{n-k} = \left(\frac{15}{8} + \frac{3}{8}\right)^n = \left(\frac{9}{4}\right)^n$$

である.

▶ 解法 2

【方針】

1 個のさいころが積へ供給する 2 の指数を母関数で記録する。3 個分の 0 次・1 次係数から $P(A)$ を得た後、反復回数については確率母関数を $s = 3$ で評価して期待値を一度に出す。

【解答】

(1)

1 個のさいころの目に含まれる 2 の指数を、2 以上はまとめて記録すると、母関数は

$$h(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}u + \frac{1}{6}u^2.$$

3 個の積が 4 で割り切れない確率は、 $h(u)^3$ の 0 次と 1 次の係数の和である。これは

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{3}{8}.$$

したがって

$$P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

(2)

4 回中の成功回数を K とすると $K \sim \text{Bin}(4, 5/8)$ 。よって

$$\begin{aligned} P(K \geq 2) &= 1 - P(K = 0) - P(K = 1) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^4 - 4 \cdot \frac{5}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{3475}{4096}. \end{aligned}$$

(3)

1 回分の成功指示変数を I とすれば

$$E(3^I) = \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{9}{4}.$$

各回は独立で、 $K = I_1 + \cdots + I_n$ だから

$$E(X) = E(3^K) = E(3^{I_1})E(3^{I_2}) \cdots E(3^{I_n}) = \left(\frac{9}{4}\right)^n.$$

【総評】 二項分布と期待値の標準問題で、想定時間は 25 分程度。最初に 1 回の成功確率を正しく出せるかがすべてである。積が 4 で割り切れない場合は、偶数が少ない場合ではなく「2 の因数の総数が 0 個または 1 個」と見ると、目が 4 の場合を自然に処理できる。(3) は K の分布を書いたあと、二項定理で $E(3^K)$ をまとめるのが最短である。