

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2000 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

中心 $A = (1, 1)$ ，半径 1 の円と，頂点

$$O = (0, 0), \quad P = (a, 0), \quad Q = (0, a)$$

をもつ三角形を考える。

(1) 線分 PQ が円周と交わるときの a の範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ が円周と交わるとき，交点のうち P に近い点を R とする。 $\angle OAR = \theta$
($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき，円と三角形の共通部分の面積を θ で表せ。

(3) R の座標と $\cos \theta$ を a で表せ。

第 2 問

n を自然数とする。

$$f_n(x) = x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 + e^{-x}$$

について、次の問いに答えよ。

(1)

$$n + \frac{1}{n} - 2 \leq x \leq n + \frac{1}{n}$$

の範囲で、 $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)

$$x \geq n + \frac{1}{n}$$

の範囲で、 $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) (1) の解を a_n 、(2) の解を b_n とする。また、2 次方程式

$$x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 = 0$$

の 2 解を p_n, q_n ($p_n \leq q_n$) とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - p_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - q_n) = 0$$

を示せ。

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$$

を求めよ。

第 3 問

正の実数 a に対して

$$F(a) = \int_{-a}^a \sin \left| x + \frac{a}{2} \right| \sin \left| x - \frac{a}{2} \right| dx$$

とおく。 $F(a)$ の最大値と最小値, およびそれらを与える a の値を求めよ。

第 4 問

点 $A = (0, a, 1)$ ($a < 0$) と, xy 平面内の放物線 $y = x^2$ 上の点 P を結ぶ直線 l を考える。 P が放物線上を動くとき, 直線 l と xz 平面との交点 Q の軌跡が, この平面内の 1 つの円に含まれるような a を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)