

北海道大学 2000 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

中心 $A = (1, 1)$, 半径 1 の円と, 頂点

$$O = (0, 0), \quad P = (a, 0), \quad Q = (0, a)$$

をもつ三角形を考える。

(1) 線分 PQ が円周と交わるときの a の範囲を求めよ。(2) 線分 PQ が円周と交わるとき, 交点のうち P に近い点を R とする。 $\angle OAR = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき, 円と三角形の共通部分の面積を θ で表せ。(3) R の座標と $\cos \theta$ を a で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

三角形は第 1 象限内の直線 $x + y = a$ 以下の部分であり, 円は中心 $A(1, 1)$, 半径 1 で第 1 象限に収まる。まず線分 PQ と円の交わりを, 中心から直線までの距離で判定する。共通部分は円を直線 $x + y = a$ で切った弓形なので, AO と AR のなす角 θ を中心角の半分として面積を出す。交点座標は, 直線の中点方向 $(1, 1)$ と弦方向 $(1, -1)$ に分解すると, P に近い点の符号まで迷わず決まる。

【解答】

(1) 三角形 OPQ は $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a$ で表され, 線分 PQ は $x + y = a$ である。円の中心 $A(1, 1)$ からこの直線までの距離は $\frac{|1 + 1 - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2 - a|}{\sqrt{2}}$ である。線分 PQ が円周と交わるためには, この距離が半径 1 以下であればよい。実際, 円は $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ にあり, 交点が存在すれば第 1 象限上で線分 PQ 上に乗る。したがって $\frac{|2 - a|}{\sqrt{2}} \leq 1$ より $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2}$ である。

(2) 直線 $x + y = a$ は円を 2 点, または接する 1 点で切る。 R ともう一方の交点を S とする。三角形は直線 $x + y = a$ の原点側であり, $a = 2 - \sqrt{2}$ では接点だけ, $a = 2 + \sqrt{2}$ では円全体を含むので, 共通部分は弦 RS と円周で囲まれる原点側の弓形である。 $\angle OAR = \theta$ であるから, AO を基準に左右対称な 2 本の半径 AR, AS のなす中心角は 2θ である。半径は 1 なので, 扇形 ARS の面積は $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta = \theta$ である。また, 二等辺三角形 ARS の面積は $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ である。したがって求める面積は $\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$ である。端の場合 $\theta = 0, \pi$ でも, それぞれ面積 $0, \pi$ となり同じ式で成り立つ。

(3) 交点は直線 $x + y = a$ 上にあるので, $x + y - 2 = a - 2$ である。中心 A から直線に下ろした垂線の足は $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ であり, AM の長さは $|a - 2|/\sqrt{2}$ である。弦の半長は

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a-2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - (a-2)^2}$$

である。弦の方向は $(1, -1)$ 方向だから, $P(a, 0)$ に近い方の交点 R は x 座標が大きい方である。よって

$$R\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2 - (a-2)^2}, \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2 - (a-2)^2}\right)$$

である。

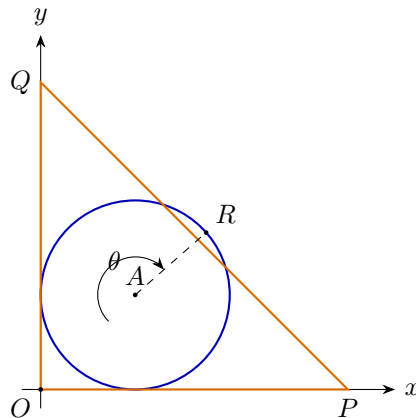
次に, AR は半径なので長さ 1, $AO = (-1, -1)$ の長さは $\sqrt{2}$ である。また $R = (x_R, y_R)$ とすると, $x_R + y_R = a$ より

$$\vec{AO} \cdot \vec{AR} = (-1, -1) \cdot (x_R - 1, y_R - 1) = 2 - a$$

である。したがって

$$\cos \theta = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AR}}{|\vec{AO}| |\vec{AR}|} = \frac{2 - a}{\sqrt{2}}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

中心 A を原点とする 45 度回転座標を使う。円は単位円、線分 PQ は 1 本の縦線になるため、交点条件、 R の符号、弓形の中心角を同じ図から読める。

【解答】

中心 $A = (1, 1)$ を原点として

$$u = \frac{x + y - 2}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

とおく。円は

$$u^2 + v^2 = 1$$

となり、直線 PQ は

$$u = \frac{a - 2}{\sqrt{2}}.$$

(1)

交点が存在する条件は

$$\left| \frac{a - 2}{\sqrt{2}} \right| \leq 1,$$

すなわち

$$2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2}.$$

(2)

AO は負の u 軸方向である。 P に近い交点 R ともう一方の交点はこの軸に関して対称で、原点側の弓形の中心角は 2θ である。したがって共通部分の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta = \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

(3)

P に近い点では $v \geq 0$ なので

$$u = \frac{a - 2}{\sqrt{2}}, \quad v = \sqrt{1 - \frac{(a - 2)^2}{2}}.$$

元の座標へ戻すと

$$R = \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2 - (a - 2)^2}, \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2 - (a - 2)^2} \right).$$

また AO は負の u 軸方向だから

$$\cos \theta = -u = \frac{2 - a}{\sqrt{2}}.$$

【総評】 難度 7, 計算量 6, 想定時間 25 分。交点条件は $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2}$, 共通面積は $\theta - \sin 2\theta / 2$, $\cos \theta = (2 - a) / \sqrt{2}$ 。 P に近い交点の平方根の符号を取り違えない。

【第 2 問】

n を自然数とする。

$$f_n(x) = x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 + e^{-x}$$

について、次の問いに答えよ。

(1)

$$n + \frac{1}{n} - 2 \leq x \leq n + \frac{1}{n}$$

の範囲で、 $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)

$$x \geq n + \frac{1}{n}$$

の範囲で、 $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) (1) の解を a_n , (2) の解を b_n とする。また、2 次方程式

$$x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 = 0$$

の 2 解を p_n, q_n ($p_n \leq q_n$) とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - p_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - q_n) = 0$$

を示せ。

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

指数項を含む方程式を直接解こうとせず、まず 2 次部分 $h_n(x)$ と指数項 e^{-x} に分ける。 $m = n + 1/n$ とおけば、2 次部分の軸は $x = m$ であり、指定区間の符号確認と微分による単調性・凸性で解の存在と一意性を示せる。後半は $h_n(x) = (x - p_n)(x - q_n)$ と因数分解し、 $f_n(a_n) = 0$ 、 $f_n(b_n) = 0$ から 2 次方程式の根との差を指数項で挟むのが核心である。

【解答】

(1) $m = n + \frac{1}{n}$ とおき、2 次部分を $h_n(x) = x^2 - 2mx + n^2 - 1$ とする。すると $f_n(x) = h_n(x) + e^{-x}$ である。区間 $m - 2 \leq x \leq m$ では $f'_n(x) = 2(x - m) - e^{-x} < 0$ であるから、 $f_n(x)$ はこの区間で狭義単調減少である。

端点での値を調べる。まず $h_n(m) = m^2 - 2m^2 + n^2 - 1 = -m^2 + n^2 - 1 = -3 - \frac{1}{n^2}$ である。また $h_n(x) = (x - m)^2 + h_n(m)$ より $h_n(m - 2) = 4 - 3 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$ である。したがって $f_n(m - 2) = 1 - \frac{1}{n^2} + e^{-(m-2)} > 0$ であり、さらに $f_n(m) = -3 - \frac{1}{n^2} + e^{-m} < 0$ である。連続性から少なくとも 1 つの解があり、狭義単調減少性から解はただ 1 つである。

(2) $x \geq m$ で $f''_n(x) = 2 + e^{-x} > 0$ だから、 $f'_n(x)$ は狭義単調増加である。また $f'_n(m) = -e^{-m} < 0$ 、 $f'_n(m + 1) = 2 - e^{-(m+1)} > 0$ なので、 $x \geq m$ に $f'_n(x) = 0$ を満たす点がただ 1 つある。したがって f_n ははじめ減少し、その後増加する。

一方で $f_n(m) < 0$ であり、 $x \rightarrow \infty$ のとき 2 次項が支配して $f_n(x) \rightarrow \infty$ となる。最小値を取るまでは負のままで、その後ただ 1 回だけ 0 を越えるから、 $x \geq m$ において $f_n(x) = 0$ の解はただ 1 つ存在する。

(3) 2 次方程式 $h_n(x) = 0$ の解は $p_n = m - \sqrt{3 + \frac{1}{n^2}}$ 、 $q_n = m + \sqrt{3 + \frac{1}{n^2}}$ である。したがって $h_n(x) = (x - p_n)(x - q_n)$ と書ける。

まず $f_n(p_n) = e^{-p_n} > 0$ 、 $f_n(m) < 0$ であり、(1) の解は一意であるから $p_n < a_n < m$ である。 $f_n(a_n) = 0$ より $(a_n - p_n)(a_n - q_n) + e^{-a_n} = 0$ であるから $(a_n - p_n)(q_n - a_n) = e^{-a_n}$ を得る。ここで $q_n - a_n > q_n - m = \sqrt{3 + 1/n^2} \geq \sqrt{3}$

であり、また $a_n > p_n \rightarrow \infty$ である。よって $0 < a_n - p_n = \frac{e^{-a_n}}{q_n - a_n} \leq \frac{e^{-a_n}}{\sqrt{3}} \rightarrow 0$ となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - p_n) = 0$$

である。

次に $f_n(m) < 0$, $f_n(q_n) = e^{-q_n} > 0$ であり、(2) の解は一意であるから $m < b_n < q_n$ である。同様に $f_n(b_n) = 0$ から $(b_n - p_n)(q_n - b_n) = e^{-b_n}$ である。ここで $b_n - p_n > m - p_n = \sqrt{3 + 1/n^2} \geq \sqrt{3}$ かつ $b_n > m \rightarrow \infty$ なので $0 < q_n - b_n = \frac{e^{-b_n}}{b_n - p_n} \leq \frac{e^{-b_n}}{\sqrt{3}} \rightarrow 0$ である。したがって $b_n - q_n = -(q_n - b_n)$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - q_n) = 0$$

も示された。

(4) (3) より $a_n - p_n \rightarrow 0$, $b_n - q_n \rightarrow 0$ であるから $b_n - a_n = (q_n - p_n) + (b_n - q_n) - (a_n - p_n)$ の右辺で、後ろ 2 項は 0 に近づく。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n - p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} = 2\sqrt{3}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

2 次部分の軸を原点に移し、その 2 根から指数項を加えた根までのずれを固定した ε で挟む。因数分解による商評価を使わず、符号の一樣評価から 2 つの極限を示す。

【解答】

$$m_n = n + \frac{1}{n}, \quad \delta_n = \sqrt{3 + \frac{1}{n^2}}$$

とおくと、2 次部分は

$$(x - m_n)^2 - \delta_n^2$$

で、その 2 根は

$$p_n = m_n - \delta_n, \quad q_n = m_n + \delta_n.$$

(1)

$m_n - 2 \leq x \leq m_n$ では

$$f'_n(x) = 2(x - m_n) - e^{-x} < 0.$$

また

$$f_n(m_n - 2) > 0, \quad f_n(m_n) < 0.$$

よって中間値の定理と狭義単調性から解はただ 1 つである。

(2)

$$f''_n(x) = 2 + e^{-x} > 0.$$

$x \geq m_n$ で導関数は負から正へただ 1 回変わる。さらに $f_n(m_n) < 0$, $f_n(x) \rightarrow \infty$ だから、零点はただ 1 つである。

(3)

任意の $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$ を固定する。 $f_n(p_n) > 0$ であり、

$$\begin{aligned} f_n(p_n + \varepsilon) &= \varepsilon(\varepsilon - 2\delta_n) + e^{-p_n - \varepsilon} \\ &\longrightarrow \varepsilon(\varepsilon - 2\sqrt{3}) < 0. \end{aligned}$$

したがって十分大きな n で

$$p_n < a_n < p_n + \varepsilon.$$

よって $a_n - p_n \rightarrow 0$ である。

同様に

$$\begin{aligned} f_n(q_n - \varepsilon) &= -\varepsilon(2\delta_n - \varepsilon) + e^{-q_n + \varepsilon} \\ &\rightarrow -\varepsilon(2\sqrt{3} - \varepsilon) < 0, \end{aligned}$$

かつ $f_n(q_n) > 0$ なので

$$q_n - \varepsilon < b_n < q_n$$

が十分大きな n で成り立つ。したがって $b_n - q_n \rightarrow 0$ である。

(4)

$$q_n - p_n = 2\delta_n \rightarrow 2\sqrt{3}.$$

(3) の 2 つのずれは 0 へ収束するので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 2\sqrt{3}.$$

【総評】 難度 8, 計算量 7, 想定時間 32 分。左側は単調減少, 右側は凸性で一意性を示す。2 次部分の根との差は指数項により 0 へ収束し, 最終極限は $2\sqrt{3}$ 。存在・一意性・根の位置・極限評価を段階ごとに分けて書く。

【第 3 問】

正の実数 a に対して

$$F(a) = \int_{-a}^a \sin \left| x + \frac{a}{2} \right| \sin \left| x - \frac{a}{2} \right| dx$$

とおく。 $F(a)$ の最大値と最小値, およびそれらを与える a の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

絶対値の中身が符号を変える点は $x = -a/2$ と $x = a/2$ である。積分区間を 3 つに分け、左右の外側は偶関数性でまとめると計算量を抑えられる。積和公式で $F(a) = \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a = \sin a(1 - \cos a)$ まで落とし、最後は周期性を踏まえて最大値・最小値を与えるすべての正の a を列挙する。

【解答】

被積分関数は x を $-x$ に替えると 2 つの因子が入れ替わるだけなので偶関数である。したがって

$$F(a) = 2 \int_0^a \sin \left| x + \frac{a}{2} \right| \sin \left| x - \frac{a}{2} \right| dx$$

である。 $0 \leq x \leq a/2$ では

$$\left| x + \frac{a}{2} \right| = x + \frac{a}{2}, \quad \left| x - \frac{a}{2} \right| = \frac{a}{2} - x$$

であり、 $a/2 \leq x \leq a$ では $\left| x - \frac{a}{2} \right| = x - \frac{a}{2}$ である。

よって積和公式を用いると

$$\begin{aligned}
 F(a) &= 2 \int_0^{a/2} \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2} - x\right) dx \\
 &\quad + 2 \int_{a/2}^a \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) \sin\left(x - \frac{a}{2}\right) dx \\
 &= \int_0^{a/2} \{\cos 2x - \cos a\} dx \\
 &\quad + \int_{a/2}^a \{\cos a - \cos 2x\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x - x \cos a \right]_0^{a/2} \\
 &\quad + \left[x \cos a - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{a/2}^a \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sin a - \frac{a}{2} \cos a \right) \\
 &\quad + \left(\frac{a}{2} \cos a - \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{1}{2} \sin a \right) \\
 &= \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a = \sin a(1 - \cos a)
 \end{aligned}$$

である。

ここから最大・最小を求める。微分すると $F'(a) = \cos a - \cos 2a$ であり、 $F'(a) = 0$ は $\cos a = \cos 2a$ すなわち $2\cos^2 a - \cos a - 1 = 0$ と同値である。したがって $\cos a = 1$ または $\cos a = -\frac{1}{2}$ である。 $F(a) = \sin a(1 - \cos a)$ は周期 2π の連続関数である。 $1 - \cos a \geq 0$ なので、正の最大値は $\sin a > 0$ かつ $\cos a = -1/2$ のとき、負の最小値は $\sin a < 0$ かつ $\cos a = -1/2$ のときに生じる。よって最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ で、これを与える a は $a = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) である。最小値は $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ で、これを与える a は $a = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) である。

▶ 解法 2

【方針】

積和公式で $F(a)$ を 1 つの三角式へ整理した後、その 2 乗を $c = \cos a$ の 4 次式として最大化する。絶対値の最大を先に決め、最後に $\sin a$ の符号で最大値と最小値を分ける。

【解答】

被積分関数は偶関数である。 $0 \leq x \leq a/2$ と $a/2 \leq x \leq a$ に分け、積和公式を使うと

$$\begin{aligned}
 F(a) &= 2 \int_0^{a/2} \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2} - x\right) dx \\
 &\quad + 2 \int_{a/2}^a \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) \sin\left(x - \frac{a}{2}\right) dx \\
 &= \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a \\
 &= \sin a(1 - \cos a).
 \end{aligned}$$

$c = \cos a$ とおくと

$$F(a)^2 = (1 - c)^3(1 + c) \quad (-1 \leq c \leq 1).$$

右辺を $H(c)$ とすると

$$H'(c) = -2(1 - c)^2(1 + 2c).$$

したがって最大は $c = -1/2$ のときで、

$$|F(a)|_{\max} = \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$\sin a > 0$ となる解を選べば最大値、 $\sin a < 0$ となる解を選べば最小値である。よって

$$\max F = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad a = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\min F = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad a = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

($k = 0, 1, 2, \dots$) である。

【総評】 難度 7, 計算量 7, 想定時間 25 分。まず $F(a) = \sin a(1 - \cos a)$ を得る。最大値は $3\sqrt{3}/4$, 最小値はその負で, $a = 2\pi/3 + 2k\pi, 4\pi/3 + 2k\pi$ 。正の a に限定して $k \geq 0$ とする。

【第 4 問】

点 $A = (0, a, 1)$ ($a < 0$) と, xy 平面内の放物線 $y = x^2$ 上の点 P を結ぶ直線 l を考える。 P が放物線上を動くとき, 直線 l と xz 平面との交点 Q の軌跡が, この平面内の 1 つの円に含まれるような a を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

放物線上の点を $P = (t, t^2, 0)$ とおき, 直線 AP と xz 平面の交点 $Q = (X, 0, Z)$ を媒介変数で表す。円に含まれる条件は, 単に見た目で 2 次式を円と判定するだけでなく, $X^2 + Z^2 + uX + vZ + w = 0$ という円の一般形に代入し, すべての t で成り立つための係数条件として求める。最後に得た a が実際に円を与えることを確認する。

【解答】

放物線上の点を $P = (t, t^2, 0)$ とおく。 $a < 0$ なので $t^2 - a > 0$ であり, 以下の分母は 0 にならない。直線 AP 上の点は $(0, a, 1) + \lambda(t, t^2 - a, -1)$ と表される。これが xz 平面上にあるとき $y = 0$ だから $a + \lambda(t^2 - a) = 0$, $\lambda = -\frac{a}{t^2 - a}$ で

ある。したがって交点 $Q = (X, 0, Z)$ は $X = -\frac{at}{t^2 - a}$, $Z = 1 + \frac{a}{t^2 - a} = \frac{t^2}{t^2 - a}$ である。

この点がある 1 つの円に含まれると仮定する。 xz 平面内の円は, 適当な定数 u, v, w を用いて $X^2 + Z^2 + uX + vZ + w = 0$ と書ける。ここへ上の X, Z を代入する。 X は t について奇関数, 他の項は偶関数であり, t と $-t$ の両方で成り立つ必要があるから, まず $u = 0$ でなければならない。

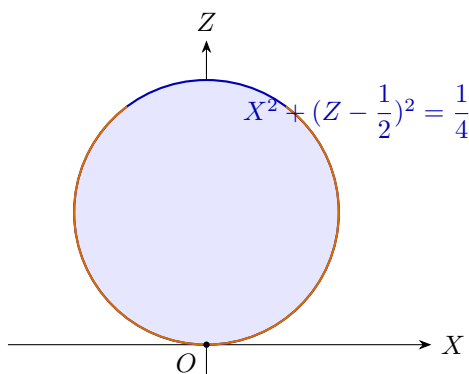
そこで $s = t^2$ とおくと, $X^2 = \frac{a^2 s}{(s - a)^2}$, $Z = \frac{s}{s - a}$ である。円の式に代入し, $(s - a)^2$ を掛けると $a^2 s + s^2 + vs(s - a) + w(s - a)^2 = 0$ が無限に多くの $s \geq 0$ で成り立つ。したがって恒等式として係数がすべて 0 でなければならない。

係数を比較すると $1 + v + w = 0$, $a^2 - av - 2aw = 0$, $a^2 w = 0$ である。 $a < 0$ より $a \neq 0$ だから $w = 0$ であり, さらに $v = -1$ となる。これを中央の式に代入して $a^2 + a = 0$ を得る。 $a < 0$ より $a = -1$ である。

実際に $a = -1$ のときは $X = \frac{t}{t^2 + 1}$, $Z = \frac{t^2}{t^2 + 1}$ であり,

$$X^2 + Z^2 - Z = \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + 1)^2} - \frac{t^2}{t^2 + 1} = 0$$

となる。これは $X^2 + \left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ という円である。よって求める値は $a = -1$ である。



▶ 解法 2

【方針】

媒介変数表示から t を消去し、軌跡そのものの 2 次方程式を得る。円なら 2 つの 2 乗項の係数が等しいことを使って a を決める。

【解答】

放物線上の点を $P = (t, t^2, 0)$ 、交点を $Q = (X, 0, Z)$ とする。直線 AP の表示から

$$X = -\frac{at}{t^2 - a}, \quad Z = \frac{t^2}{t^2 - a}.$$

ここから

$$1 - Z = -\frac{a}{t^2 - a}, \quad X = t(1 - Z)$$

である。また

$$t^2 = -\frac{aZ}{1 - Z}.$$

したがって

$$X^2 = t^2(1 - Z)^2 = -aZ(1 - Z),$$

すなわち軌跡は

$$X^2 - aZ^2 + aZ = 0$$

を満たす。

この 2 次曲線が 1 つの円に含まれるには、 X^2 と Z^2 の係数が等しくなければならない。よって

$$-a = 1, \quad a = -1.$$

実際、 $a = -1$ のとき

$$X^2 + Z^2 - Z = 0,$$

すなわち

$$X^2 + \left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

である。したがって求める値は $a = -1$ である。

【総評】 難度 7, 計算量 6, 想定時間 25 分。軌跡の媒介表示を円の一般形へ代入する方法と、 t を消去する方法の 2 通りを収録した。答は $a = -1$ 、円は $X^2 + (Z - 1/2)^2 = 1/4$ 。必要性だけでなく代入による十分性も確認する。