

北海道大学 2001 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

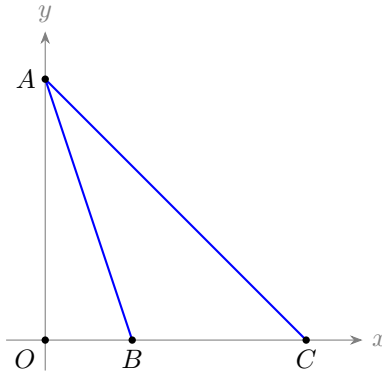
【第 1 問】

平面上の 4 点

$$O(0,0), \quad A(0,3), \quad B(1,0), \quad C(3,0)$$

について次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \angle BAC$ を求めよ。
 (2) 点 P が線分 OA 上を動くとき、 $\sin \angle BPC$ の最大値と、それを与える点 P の座標を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

(1) は 2 つのベクトル AB, AC の作る平行四辺形の面積を使って正弦を求める。(2) は $P = (0, t)$ 、 $0 \leq t \leq 3$ と置き、 PB, PC の外積の大きさと長さから $\sin \angle BPC$ を式にする。正弦は非負なので 2 乗を最大化し、 $u = t^2$ の 1 変数関数として調べる。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -3)$ である。2 つのベクトルの作る平行四辺形の面積は $|1 \cdot (-3) - (-3) \cdot 3| = 6$ である。また

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

である。したがって $\sin \angle BAC = \frac{6}{\sqrt{10}\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である。よって $\sin \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である。

(2)

点 P は線分 OA 上を動くので $P = (0, t)$ ($0 \leq t \leq 3$) とおける。このとき $\overrightarrow{PB} = (1, -t)$, $\overrightarrow{PC} = (3, -t)$ である。したがって

$$|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}| \sin \angle BPC = |1 \cdot (-t) - (-t) \cdot 3| = 2t$$

である。 $t \geq 0$ だから $\sin \angle BPC = \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+9)}}$ となる。

正弦は非負なので、これの 2 乗を最大にすればよい。 $u = t^2$ とおくと $0 \leq u \leq 9$ であり $\{\sin \angle BPC\}^2 = \frac{4u}{(u+1)(u+9)}$ である。これを $F(u)$ とおくと

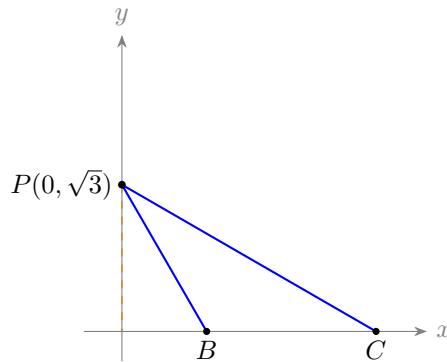
$$F'(u) = \frac{4\{(u+1)(u+9) - u(2u+10)\}}{(u+1)^2(u+9)^2} = \frac{4(9-u^2)}{(u+1)^2(u+9)^2}$$

である。

したがって $0 \leq u \leq 9$ では、 $u = 3$ まで増加し、その後減少する。よって最大は $u = 3$ 、すなわち $t = \sqrt{3}$ のときである。

このとき $\sin \angle BPC = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(4)(12)}} = \frac{1}{2}$ である。

よって最大値とそのときの点は $\frac{1}{2}$, $P = (0, \sqrt{3})$ である。



▶ 解法 2 (相加相乗平均)

【方針】

点 $P = (0, t)$ として正弦の 2 乗を $u = t^2$ の式にする。微分せず、分母を u で割った式へ相加相乗平均を使って最大値と等号条件を同時に得る。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (1, -3), \quad \overrightarrow{AC} = (3, -3)$$

だから、平行四辺形の面積は 6 である。また

$$|AB| = \sqrt{10}, \quad |AC| = 3\sqrt{2}.$$

よって

$$\sin \angle BAC = \frac{6}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(2)

$P = (0, t)$ ($0 \leq t \leq 3$) とおく。2 本のベクトル

$$\overrightarrow{PB} = (1, -t), \quad \overrightarrow{PC} = (3, -t)$$

の作る平行四辺形の面積は $2t$ なので

$$\sin \angle BPC = \frac{2t}{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 9)}}.$$

$u = t^2$ とおく。 $u > 0$ のとき

$$\{\sin \angle BPC\}^{-2} = \frac{(u+1)(u+9)}{4u} = \frac{1}{4} \left(u + 10 + \frac{9}{u} \right).$$

相加相乗平均より

$$u + \frac{9}{u} \geq 6$$

で、等号は $u = 3$ のときに成り立つ。したがって

$$\{\sin \angle BPC\}^{-2} \geq 4, \quad \sin \angle BPC \leq \frac{1}{2}.$$

$u = 3$ は $0 \leq u \leq 9$ に含まれるから、最大値は $\frac{1}{2}$ 、そのとき $t = \sqrt{3}$ である。よって

$$P = (0, \sqrt{3}).$$

【総評】 難度 5、計算量 5。座標を置けば標準的な三角比の最大化になる。外積に相当する面積計算で正弦を出すと、角度そのものを求める必要がない。(2) では t ではなく $u = t^2$ にして分数関数を調べると整理しやすい。端点 $t = 0, 3$ も範囲に含まれるが、導関数の符号で $u = 3$ が最大と確認することが大切。目安は 15 分程度。2 つの解法は、答案で採用しやすい標準手順と、構造を見抜いて短く処理する手順を分けて示した。式変形の根拠、等号条件、必要性和十分性を省略せず、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 2 問】

次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

(1) 方程式

$$e^x - e^{-x} = 2x$$

の解は $x = 0$ に限ることを示せ。

(2) p を実数とする。次の等式が成り立つのは $p = 0$ の場合に限ることを示せ。

$$\int_{1/e}^e t^{p-1} dt = 2$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は左辺から右辺を引いた $h(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ を考え、導関数 $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$ で単調性を示す。等号の位置と $h(0) = 0$ から解を一意にする。(2) は $p = 0$ を直接確認し、 $p \neq 0$ では積分値を $(e^p - e^{-p})/p$ と計算して (1) の方程式へ帰着する。

【解答】

(1) $h(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ とおく。すると $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2$ である。相加平均・相乗平均より $e^x + e^{-x} \geq 2$ であり、等号は $e^x = e^{-x}$ 、すなわち $x = 0$ のときだけである。よって $h'(x) \geq 0$ であり、 h は増加関数である。さらに $x \neq 0$ を含む区間では導関数が正になる部分をもつので、 h は実質的に一方向にしか進まない。 $h(0) = 0$ であるから、 $x > 0$ では $h(x) > 0$ 、 $x < 0$ では $h(x) < 0$ となる。したがって $e^x - e^{-x} = 2x$ の解は $x = 0$ に限られる。

(2)

まず $p = 0$ のとき

$$\int_{1/e}^e t^{p-1} dt = \int_{1/e}^e \frac{1}{t} dt = [\log t]_{1/e}^e = 2$$

である。

次に $p \neq 0$ とする。このとき

$$\int_{1/e}^e t^{p-1} dt = \left[\frac{t^p}{p} \right]_{1/e}^e = \frac{e^p - e^{-p}}{p}$$

である。これが 2 に等しいなら $e^p - e^{-p} = 2p$ が成り立つ。(1) よりこの方程式の解は $p = 0$ に限られるが、これは $p \neq 0$ に反する。

したがって条件をみたすのは $p = 0$ の場合に限る。

▶ 解法 2 (積分による符号判定)

【方針】

指数関数の差を微分して得る非負関数を 0 から積分し、方程式の左辺と右辺の大小を x の符号ごとに決める。後半は積分を計算して同じ方程式へ帰着する。

【解答】

(1)

相加相乗平均より

$$e^t + e^{-t} - 2 \geq 0$$

で、等号は $t = 0$ のときに限る。したがって

$$e^x - e^{-x} - 2x = \int_0^x \{e^t + e^{-t} - 2\} dt.$$

$x > 0$ なら右辺は正、 $x < 0$ なら積分の向きが逆なので負である。 $x = 0$ では 0 になる。よって

$$e^x - e^{-x} = 2x$$

の解は $x = 0$ に限られる。

(2)

$p = 0$ のとき

$$\int_{1/e}^e \frac{1}{t} dt = 2$$

である。 $p \neq 0$ なら

$$\int_{1/e}^e t^{p-1} dt = \frac{e^p - e^{-p}}{p}.$$

これが 2 なら $e^p - e^{-p} = 2p$ であるが、(1) よりその解は $p = 0$ だけであり、 $p \neq 0$ に矛盾する。したがって等式が成り立つのは $p = 0$ の場合に限る。

【総評】 難度 5、計算量 4。(1) の単調性がそのまま (2) の一意性に使われる誘導問題である。 $e^x + e^{-x} \geq 2$ の等号条件を明記し、 $h(0) = 0$ と合わせて解が 0 だけであることを示すのが要点。(2) では $p = 0$ の積分だけ別扱いにする必要がある。目安は 12 分程度。2 つの解法は、答案で採用しやすい標準手順と、構造を見抜いて短く処理する手順を分けて示した。式変形の根拠、等号条件、必要性和十分性を省略せず、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 3 問】

2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} \quad (x, y, z \text{ は実数})$$

に対して、 $AX = XA$ が成り立っているとき、次の問いに答えよ。

(1) z を x, y で表せ。

(2) X はある実数 p, q に対して

$$X = p \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

と表せることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

まず $AX - XA$ を成分で計算し、非対角成分から $z = 2(y - x)/3$ を得る。(2) は指定された 2 つの行列の係数 p, q を未知数として、対角成分 x, y から連立方程式で p, q を決める。最後に非対角成分 $2p - 2q$ が (1) の z と一致することを確認すればよい。

【解答】

(1)

成分を計算する。

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$$

であるから

$$AX = \begin{pmatrix} 9x - 2z & 9z - 2y \\ -2x + 6z & -2z + 6y \end{pmatrix}$$

であり

$$XA = \begin{pmatrix} 9x - 2z & -2x + 6z \\ 9z - 2y & -2z + 6y \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$AX - XA = \begin{pmatrix} 0 & 2x - 2y + 3z \\ -2x + 2y - 3z & 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $AX = XA$ であるから $2x - 2y + 3z = 0$ である。よって $z = \frac{2(y - x)}{3}$ である。

(2)

指定された形で表せるかを調べるため

$$X = p \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。右辺を成分で書くと

$$\begin{pmatrix} p + 4q & 2p - 2q \\ 2p - 2q & 4p + q \end{pmatrix}$$

である。したがって $x = p + 4q$, $y = 4p + q$ となるように p, q を決めればよい。

この連立方程式を解くと $p = \frac{-x + 4y}{15}$, $q = \frac{4x - y}{15}$ である。このとき非対角成分は

$$2p - 2q = 2 \left(\frac{-x + 4y}{15} - \frac{4x - y}{15} \right) = \frac{2(y - x)}{3}$$

である。これは (1) で求めた z と一致する。

よって

$$X = p \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

と表せる。ただし $p = \frac{-x + 4y}{15}$, $q = \frac{4x - y}{15}$ である。

▶ 解法 2 (固有方向による分解)

【方針】

行列 A が互いに直交する 2 方向をそれぞれ保つことを確認する。 $AX = XA$ なら X もその 2 方向を保つので、各方向への射影行列の 1 次結合として X を表す。

【解答】

(1)

成分を比較すると、 $AX = XA$ の右上成分から

$$9z - 2y = -2x + 6z.$$

したがって

$$z = \frac{2(y - x)}{3}.$$

(2)

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 v, w は互いに直交し

$$Av = 5v, \quad Aw = 10w$$

である。 $AX = XA$ より

$$A(Xv) = X(Av) = 5Xv.$$

A の固有値 5 の方向は v の方向だけなので、ある実数 α により $Xv = \alpha v$ と書ける。同様に $Xw = \beta w$ と書ける。一方、

$$vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad ww^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$|v|^2 = |w|^2 = 5$ だから

$$X = \frac{\alpha}{5}vv^T + \frac{\beta}{5}ww^T.$$

よって $p = \alpha/5$, $q = \beta/5$ とおけば、指定された形で表せる。成分表示では

$$p = \frac{-x + 4y}{15}, \quad q = \frac{4x - y}{15}$$

であり、非対角成分も

$$2p - 2q = \frac{2(y - x)}{3} = z$$

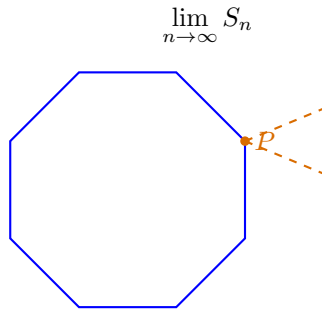
と一致する。

【総評】 難度 5、計算量 5。成分計算を正確に進めれば解ける問題で、抽象的な行列論は不要である。(1) では $AX - XA$ の右上成分だけで条件が出るが、左下成分が同じ条件の符号違いになることも確認しておくとも安全。(2) は対角成分から p, q を決め、最後に非対角成分が z と合うことを示す流れが自然である。目安は 15 分程度。2 つの解法は、答案で採用しやすい標準手順と、構造を見抜いて短く処理する手順を分けて示した。式変形の根拠、等号条件、必要性和十分性を省略せず、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 4 問】

n を 2 以上の整数とし、周囲の長さが 2 の正 $2n$ 角形 K と、 K の 1 つの頂点 P を考える。

- (1) K と同じ平面上にある長さが $\frac{1}{n}$ 以下のひもで、 K の内部を通らずに点 P と結べる点の全体がなす図形の面積を求めよ。
- (2) K と同じ平面上にある長さが 1 以下のひもで、 K の内部を通らずに点 P と結べる点の全体がなす図形の面積を S_n とする。次の極限を求めよ。



図は $2n = 8$ の場合

▶ 解法 1

【方針】

正 $2n$ 角形の 1 辺と外角を求める。ひもを外側へ巻き付けると各頂点で扇形が追加されるので、中心角と残りのひもの長さから面積の和を作り、平方和の公式で極限を取る。

【解答】

(1)

正 $2n$ 角形の 1 辺は $1/n$ 、内角は $\pi - \pi/n$ である。したがって頂点 P の外側へ開く角は

$$\pi + \frac{\pi}{n}.$$

長さ $1/n$ のひもは隣の頂点で使い切るので、到達領域は半径 $1/n$ 、この中心角のおうぎ形である。よって面積は

$$\frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{n} \right) \frac{1}{n^2} = \frac{\pi(n+1)}{2n^3}.$$

(2)

P では半径 1、中心角 $\pi + \pi/n$ のおうぎ形ができる。左右へ k 辺回り込んだ頂点では、残りの長さが $1 - k/n$ 、新しく開く角が π/n である。したがって

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{n} \right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

▶ 解法 2 (扇形の展開とリーマン和)

【方針】

ひもを多角形の外側へ巻き付けていくと、各頂点で新たに到達できる部分が扇形として開く。各扇形の角と残り長さを整理し、後半の平方和をリーマン和として評価する。

【解答】

(1)

正 $2n$ 角形の 1 辺は $1/n$ 、内角は $\pi - \pi/n$ である。頂点 P から直接ひもを伸ばせる外側の角は

$$2\pi - \left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = \pi + \frac{\pi}{n}.$$

ひもの長さが $1/n$ 以下なら、隣の頂点へ達した時点で残りは 0 なので、正の面積をもつ追加部分はない。よって面積は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi(n+1)}{2n^3}.$$

(2)

まず P を中心に、半径 1、中心角 $\pi + \pi/n$ の扇形ができる。 P から左右どちらかへ k 辺進んだ頂点ではひもを k/n 使っている、残りは

$$1 - \frac{k}{n}.$$

そこで新しく開く角は外角 π/n である。左右 2 方向を合わせて

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \pi \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

最後の中括弧は $y = x^2$ の $0 \leq x \leq 1$ におけるリーマン和なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。図形の本質は、ひもを多角形の外側に巻きつけたときに各頂点で扇形が追加される、という展開の考え方である。(1) では辺長 $1/n$ と外側角 $\pi + \pi/n$ を出すこと、(2) では左右 2 方向の係数 2 と残り長さ $1 - k/n$ の 2 乗を落とさないことが重要である。最後は平方和の極限なので、式を作れば計算は標準的。目安は 25 分程度。2 つの解法は、答案で採用しやすい標準手順と、構造を見抜いて短く処理する手順を分けて示した。式変形の根拠、等号条件、必要性和十分性を省略せず、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。