

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2002 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について問いに答えよ.

$$a_1 = b$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{a_n} & (a_n \geq 1) \\ 2a_n & (a_n < 1) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $b = 2^k$ (k は整数) のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を求めよ.

(2) $0 < b < 1$ とする. $b \neq 2^k$ (k は整数) のとき, $a_n < 1 < a_{n+1}$ となる最小の自然数 n を m とする. このとき, 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ.

第 2 問

条件

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(-1) = -1, \quad g(1) = 0, \quad f'(0) = g'(0)$$

を満たす 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ のうち,

$$\int_{-1}^0 \{f'(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{g'(x)\}^2 dx$$

が最小となるものを求めよ.

第 3 問

xy 平面において放物線 $y = ax^2 + b$ ($a \neq 0$) を考える. この放物線と, ちょうど 2 つの共有点をもつ円 $x^2 + y^2 = r^2$ で $0 < r < -b$ を満たすものが存在するとする.

- (1) a, b が満たす条件を求めよ.
- (2) a, b が (1) の条件を満たすとき, $a^2 + b^2$ の値の範囲を求めよ.

第 4 問

原点 O を中心とする半径 r の球面上に相異なる 3 点 A, B, C をとる. 線分 OA と線分 OB は垂直とし, $\angle AOC$ と $\angle BOC$ の大きさの和は 120° であるとする.

- (1) 線分 OA と線分 OC が垂直であるとき, $\left(\frac{CB}{AB}\right)^2$ を求めよ.
- (2) 直線 AB 上の点と点 C との最短距離 d を最大とする $\angle AOC$ の大きさを求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)